

13. МЕХАНИЧЕСКИЕ ТОРГОВЫЕ СИСТЕМЫ

13.1. Введение.

Определим инвестирование как вложение свободных денежных средств в различные виды финансовых активов с целью получения прибыли. При формировании инвестиционного портфеля выбирается такой набор активов и такой способ управления ими, которые бы обеспечивали ожидаемый доход не ниже заранее заданного минимального значения при риске получения дохода не выше заранее заданного максимального значения. Существуют два основных способа управления портфелем ценных бумаг: активный и пассивный.

Суть пассивного управления состоит в создании хорошо диверсифицированного, состоящего из большого количества активов портфеля, и продолжительного удерживания его в неизменном состоянии. Пассивный портфель характеризуется низким оборотом и малым уровнем накладных расходов.

Мы сконцентрируем внимание на рассмотрении активного управления портфелем, которое нацелено на получение дохода выше среднерыночного уровня. Активное управление подразумевает:

- выбор небольшого количества высоколиквидных активов для формирования портфеля,
- определение правил открытия и закрытия позиций по каждому из активов,
- определение объема открываемых позиций,
- оптимизацию портфеля, то есть методы снижения рисков.

Определим некоторые понятия, которые будем использовать в дальнейшем.

Механическая торговая система (МТС) - набор правил, однозначно определяющих моменты открытия и закрытия позиций, то есть МТС задает правила входа в позицию, правила выхода из выигрывающей позиции, правила выхода из проигрывающей позиции.

Управление капиталом - набор правил, определяющих объем открываемых позиций в момент поступления соответствующих сигналов от МТС.

Оптимизация портфеля - методы, позволяющие выбрать такой состав портфеля активов и торгующих эти активы механических систем, которые бы в наибольшей степени соответствовали инвестиционным предпочтениям конкретного трейдера.

13.2. Механический и интуитивный подход к торговле.

Динамику биржевых цен активов можно представить как стохастический и нестационарный процесс. Однако, это не исключает возможность нахождения такого набора эмпирических правил, что проведение в соответствии с ними торговых операций позволяет увеличить доходность и/или уменьшить риск вложения в данный актив по сравнению с пассивной стратегией "купил и держи".

Создание механической торговой системы - это полная формализация таких правил. При этом нужно понимать, что так как правила открытия и закрытия позиций разрабатываются на основе прошлой истории цен, то не существует гарантии того, что МТС на их основе будет успешно работать и в будущем. Но чем более качественно проведено тестирование МТС, тем больше оснований надеяться на то, что ее результаты при реальной торговле будут находиться в приемлемых для трейдера пределах.

У механического подхода есть два преимущества по сравнению с часто практикуемым интуитивным подходом к торговле:

- при принятии торговых решений исключается эмоциональный фактор,
- принятые торговые решения не являются субъективными, следовательно оправдано формальное статистическое исследование результатов работы МТС, позволяющее найти и скорректировать ее слабые места.

Следует еще раз подчеркнуть, что для любой механической системы существует вероятность того, что по истечении любого интервала времени в результате проведения торговых операций по ее сигналам будет получен убыток. Однако, для достаточно хорошей системы эта вероятность тем меньше, чем больше время торговли. Поэтому считается, что для того, чтобы МТС смогла реализовать свое статистическое преимущество, необходимо не менее 2-3 лет.

13.3. Свойства МТС.

Показатели механической торговой системы характеризуют результаты ее работы. Величина, разброс и устойчивость показателей определяют качество системы. Подробно показатели МТС и методы их статистического исследования будут рассмотрены ниже.

Параметрами механической торговой системы называются переменные, присутствующие в правилах открытия и закрытия позиций. В результате тестирования и оптимизации МТС определяется такой набор параметров, при котором величина, разброс и устойчивость важнейших показателей системы находятся в оптимальных для конкретного трейдера пределах. Хорошая МТС должна обладать следующими свойствами:

- иметь небольшое количество оптимизируемых параметров,
- иметь удовлетворительные показатели работы при реальных рыночных комиссиях,
- обладать устойчивостью показателей работы в области оптимальности параметров,
- должно существовать по крайней мере несколько активов, на которых система имеет приемлемые результаты без повторной оптимизации.

Число оптимизируемых параметров

Чем больше оптимизируемых параметров имеет МТС, тем меньше вероятность того, что она будет удовлетворительно работать при реальной торговле. Это связано с тем, что при большом числе параметров система подгоняется под исторический ряд цен, на котором происходило тестирование. Но ряды цен активов в большой степени носят случайный характер. Задачей же хорошей системы является не учет всех особенностей конкретной случайной выборки, а выявление более или менее постоянно действующих на рынке закономерностей. Здесь уместна аналогия с регрессионным анализом, где также нужно с осторожностью относиться к излишнему переусложнению модели.

Величина комиссии

Важным моментом при тестировании МТС является величина комиссии, которая должна соответствовать реальным на

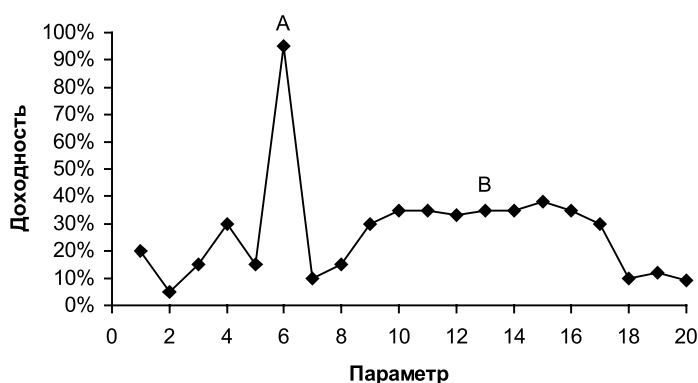
кладным расходам при совершении сделки, то есть она должна учитывать следующие величины:

- комиссию с оборота (брокерскую и биржевую),
- спрэд (разницу между котировками на покупку и продажу),
- проскальзывание (разницу между величиной сигнала МТС и реальной ценой исполнения сделки).

Если биржевая и брокерская комиссии не зависят от вида актива, то на величины спрэдов и проскальзываний существенное влияние оказывает ликвидность конкретного актива. В целом можно сказать, что при тестировании МТС суммарную комиссию следует выбирать не менее чем 0.5% от суммы сделки даже для наиболее ликвидных активов.

Устойчивость показателей в области оптимальности

Устойчивость показателей МТС в области оптимальности параметров проще всего проиллюстрировать графически для системы, зависящей от единственного параметра. Рассмотрим график зависимости одного из показателей системы (доходности в % годовых) от величины оптимизируемого параметра.



В данном случае выбор в качестве оптимальной величины параметра значение, соответствующее точке А (параметр=6, доходность≈95%год.), не является правильным, так как в районе этой точки величина доходности является неустойчивой и столь резкий пик вероятнее всего объясняется особенностями конкретной случайной выборки, на которой происходило тестирование.

Более разумным представляется выбор в качестве оптимальной величины параметра значение, соответствующее точке В (параметр=13, доходность≈35%год.), так как в области этой точки доходность устойчива к изменению параметра в достаточно широких пределах.

На устойчивость следует проверять все важные для трейдера показатели работы системы. У разных показателей области устойчивости будут вообще говоря разными. В качестве оптимального следует выбрать такое значение параметра, которое находится в области устойчивости большинства наиболее важных для трейдера показателей системы.

Удовлетворительные результаты на различных активах

Механическая система как правило создается, тестируется и оптимизируется на историческом ряде цен одного актива. Одной из главных задач создания хорошей МТС является предотвращение ее подгонки под конкретные исторические данные, которые наверняка не повторятся в будущем. Эффективным способом проверки МТС на излишнюю подгонку является переход на другие активы без изменения параметров системы. Если при переходе на исторические ряды цен других активов без повторной оптимизации параметров система продолжает показывать удовлетворительные результаты, то это повышает вероятность того, что она окажется прибыльной в реальной торговле. При этом надо иметь в виду, что если активы высокоррелированы, то это существенно снижает ценность такой проверки. Если же при переходе с ряда цен исходного актива (на котором МТС создавалась и оптимизировалась) на ряд цен высокоррелированного с ним актива система разваливается, то это служит веским основанием для отказа от нее.

13.4. Минимальное число сделок.

Для достоверной оценки величины и разброса показателей механической торговой системы количество сделок на периоде тестирования не должно быть меньше некоторого минимального значения. Считая, что результат отдельной сделки (например размер прибыли) является случайной величиной, оценим минимальный объем выборки для идентификации закона распределения этой величины. Для идентификации закона распределения необходимо построить гистограмму эмпирических частот и провести сравнение эмпирических и теоретических частот по критерию хи-квадрат.

Напомним, что минимальное количество столбцов гистограммы должно равняться пяти.

Так как приводимые ниже выкладки будут носить оценочный характер, предположим заранее, что исследуемая случайная величина подчиняется нормальному закону распределения.

Примем в качестве интервала возможных значений этой величины промежуток $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$. Вероятность оказаться внутри этого интервала 95.45%. Ширину столбца гистограммы можно найти, разделив ширину интервала возможных значений, то есть 4σ , на минимальное количество столбцов гистограммы, то есть число 5. В итоге получим, что ширина столбца равна 0.8σ . В таблице приведены значения нормированных теоретических частот попадания в соответствующие столбцы гистограммы для стандартной нормальной величины ($\mu = 0, \sigma = 1$).

Номер интервала	Левая граница	Правая граница	Нормированная частота	
1	-2.0	-1.2	0.0923	
2	-1.2	-0.4	0.2295	
3	-0.4	0.4	0.3108	
4	0.4	1.2	0.2295	
5	1.2	2.0	0.0923	
ИТОГО			0.9545	

Для проверки закона распределения по критерию хи-квадрат в таблице должны присутствовать ненормированные частоты, причем минимальное значение частоты не должно быть меньше пяти. Следовательно, переход к ненормированной частоте можно сделать путем умножения на коэффициент $5/0.0923 = 54.16$ и округлив результат до целого. В итоге таблица частот примет вид:

Номер интервала	Левая граница	Правая граница	Частота
1	-2.0	-1.2	5
2	-1.2	-0.4	12
3	-0.4	0.4	17
4	0.4	1.2	12
5	1.2	2.0	5
ИТОГО			51

Таким образом мы получили, что для оценки показателей механической торговой системы объем выборки (количество сделок на периоде тестирования) не должен быть меньше 51. Заметим, что при вычислении этого значения мы использовали минимально возможное число столбцов гистограммы (5 столбцов) и не очень широкий доверительный интервал (95%). С увеличением количества столбцов (уменьшением ширины столбца) и увеличением доверительного интервала минимально необходимый объем выборки может существенно вырасти.

13.5. Тестирование МТС.

Целью тестирования механической торговой системы является проверка ее работы на историческом ряде цен. Тестирование как правило проводят, используя пакеты технического анализа. По результатам тестирования программа формирует отчеты, на основании которых делаются выводы о качестве МТС.

При оптимизации системы, в правилах, описывающих открытие и закрытие позиций, постоянные параметры заменяются на оптимизируемые переменные (ОРТ-переменные), для которых задаются диапазон и шаг изменения. Затем программа проводит ряд тестов для всех возможных сочетаний ОРТ-переменных и формирует соответствующие отчеты. По результатам анализа этих отчетов выбирается такой набор параметров, при котором величина, разброс и устойчивость показателей системы являются оптимальными для трейдера.

Тестирование и оптимизацию системы рекомендуется проводить раздельно для длинных и коротких сделок.

Мы будем рассматривать следующие отчеты о тестировании системы: отчет о величине торгового счета (equity report), сгруппированный отчет о величине торгового счета, отчет о сделках (trades report), сводный отчет (results report).

ПРИМЕЧАНИЕ: далее в тексте содержание отчетов, а также обозначения показателей МТС и формулы для их вычисления могут отличаться от принятых в пакетах технического анализа.

13.6. Отчет о величине торгового счета.

Отчет о величине торгового счета показывает изменение стоимости портфеля на каждом ценовом баре. Отчет содержит следующие поля:

bar number	Порядковый номер текущего временного периода (бара).
date	Дата/время текущего бара.
position	Торговая позиция на конец текущего бара. Возможны следующие типы позиций: "OUT" - вне рынка, "LONG" - длинная позиция, "SHORT" - короткая позиция.
price	Текущая цена актива.
net change price	Изменение цены актива за текущий период.
% change price	Процентное изменение цены актива за текущий период.
equity	Текущая величина торгового счета.
net change equity	Изменение величины торгового счета за текущий период.
% change equity	Процентное изменение величины торгового счета за текущий период.

13.7. Сгруппированный отчет о величине торгового счета.

Сгруппированный отчет о величине торгового счета формируется на основе отчета о торговом счете и показывает изменение стоимости портфеля по укрупненным периодам времени. Отчет содержит следующие поля:

period grp	Период группировки: "D" - день, "W" - неделя, "M" - месяц, "Q" - квартал, "Y" - год.
period number	Порядковый номер текущего временного периода.
first date	Первая дата/время текущего периода.

last date	Последняя дата/время текущего периода.
price	Цена актива на конец текущего периода.
net change price	Изменение цены актива за текущий период.
% change price	Процентное изменение цены актива за текущий период.
equity	Величина торгового счета на конец текущего периода.
net change equity	Изменение величины торгового счета за текущий период.
% change equity	Процентное изменение величины торгового счета за текущий период.

13.8. Отчет о сделках.

Отчет о сделках формируется на основе отчета о торговом счете и описывает каждую торговую операцию, сгенерированную системой. Приведем список полей отчета о сделках и некоторые формулы для вычисления показателей системы:

Общая информация о сделке

trade number	Порядковый номер сгенерированной при тестировании сделки.
trade type	Тип сделки: "LONG" - длинная сделка, "SHORT" - короткая сделка.
bars in trade	Количество баров, в течение которых была открыта данная позиция.
days in trade	Число календарных дней, в течение которых была открыта данная позиция.
max price in trade	Максимальная цена актива от момента открытия позиции до момента ее закрытия.
min price in trade	Минимальная цена актива от момента открытия позиции до момента ее закрытия.

Показатели, характеризующие вход в позицию

enter bar	Номер бара, на котором была открыта позиция.
enter date	Дата входа в позицию.
enter price	Цена актива, по которой была открыта позиция.
enter equity	Величина торгового счета до входа в позицию.
enter comission	Сумма уплаченной комиссии за открытие позиции.
enter efficiency	Эффективность входа в позицию.

Показатели, характеризующие выход из позиции

exit bar	Номер бара, на котором была закрыта позиция.
exit date	Дата выхода из позиции.
exit price	Цена актива, по которой была закрыта позиция.
exit equity	Величина торгового счета после выхода из позиции.
exit comission	Сумма уплаченной комиссии за закрытие позиции.
exit efficiency	Эффективность выхода из позиции.

Показатели, характеризующие сделку

net profit	Величина дохода по данной сделке (в деньгах).
% profit	Величина дохода по данной сделке (в %).
net drawdown	Наибольшее снижение торгового счета в течение данной операции относительно входа в позицию (в деньгах).
% drawdown	Наибольшее снижение торгового счета в течение данной операции относительно входа в позицию (в %).

comission in trade	Сумма уплаченной комиссии за открытие и закрытие позиции.
trade efficiency	Эффективность сделки.

Эффективность входа в позицию показывает, насколько хорошо МТС в ходе конкретной сделки реализует потенциальную прибыль относительно цены входа в позицию и вычисляется по формулам:

- для длинных позиций

$$enter\ efficiency = \frac{max\ price\ in\ trade - enter\ price}{max\ price\ in\ trade - min\ price\ in\ trade}$$

- для коротких позиций

$$enter\ efficiency = \frac{enter\ price - min\ price\ in\ trade}{max\ price\ in\ trade - min\ price\ in\ trade}$$

Эффективность входа может принимать значения от 0 до 1.

Эффективность выхода из позиции показывает, насколько хорошо МТС в ходе конкретной сделки реализует потенциальную прибыль относительно цены выхода из позиции и вычисляется по формулам:

- для длинных позиций

$$exit\ efficiency = \frac{exit\ price - min\ price\ in\ trade}{max\ price\ in\ trade - min\ price\ in\ trade}$$

- для коротких позиций

$$exit\ efficiency = \frac{max\ price\ in\ trade - exit\ price}{max\ price\ in\ trade - min\ price\ in\ trade}$$

Эффективность выхода может принимать значения от 0 до 1.

Эффективность сделки показывает, насколько хорошо МТС в ходе конкретной сделки реализует общую потенциальную прибыль и вычисляется по формулам:

- для длинных позиций

$$trade\ efficiency = \frac{exit\ price - enter\ price}{max\ price\ in\ trade - min\ price\ in\ trade}$$

- для коротких позиций

$$trade\ efficiency = \frac{enter\ price - exit\ price}{max\ price\ in\ trade - min\ price\ in\ trade}$$

- общая формула

$$trade\ efficiency = enter\ efficiency + exit\ efficiency - 1$$

Эффективность сделки может принимать значения от -1 до 1.

Считается что у МТС средняя эффективность входов и средняя эффективность выходов должна быть больше 0.6, то есть средняя эффективность сделки должна превышать 0.2. Анализ эффективности наглядно показывает направления усовершенствования системы, так как позволяет разделить оценить качество сигналов на вход в позицию и сигналов на выход из нее.

13.9. Сводный отчет.

Сводный отчет формируется на основе отчета о торговом счете и отчета о сделках и дает общую информацию о результатах тестирования системы. Приведем список полей сводного отчета и некоторые формулы для вычисления показателей системы:

Показатели, характеризующие линию торгового счета на периоде тестирования.

start date	Дата начала тестирования.
start equity	Величина торгового счета на начало тестирования (начальные инвестиции).
finish date	Дата окончания тестирования.
finish equity	Величина торгового счета после окончания тестирования.
total bars	Количество баров, в течение которых происходило тестирование.
total days	Число календарных дней, в течение которых происходило тестирование.
net system drawdown	Наибольшее снижение торгового счета относительно начальных инвестиций (в деньгах).
% system drawdown	Наибольшее снижение торгового счета относительно начальных инвестиций (%).

Показатели, характеризующие доходность стратегии "купил и держи" на периоде тестирования.

buy&hold net profit	Доход стратегии "купил и держи" на периоде тестирования (в деньгах).
buy&hold % profit	Доход стратегии "купил и держи" на периоде тестирования (%).
buy&hold % profit in year	Доходность стратегии "купил и держи" на периоде тестирования (в % годовых по формуле сложного процента).

Показатели, характеризующие доходность МТС на периоде тестирования.

total net profit	Доход на периоде тестирования (в деньгах).
total % profit	Доход на периоде тестирования (%).
total % profit in year	Доходность на периоде тестирования (в % годовых по формуле сложного процента).

Показатели, характеризующие сделки.

total trades	Общее число сделок.
% in trade	Доля времени на периоде тестирования, в течение которого система имела открытые позиции.
% out trade	Доля времени на периоде тестирования, в течение которого система была вне рынка.
avg net profit	Средний доход сделок (в деньгах).
stdev net profit	Среднеквадратичное отклонение дохода сделок (в деньгах).
avg % profit	Средний доход сделок (%).
stdev % profit	Среднеквадратичное отклонение дохода сделок (%).
avg net drawdown	Среднее наибольших снижений торгового счета (в деньгах).
stdev net drawdown	Среднеквадратичное отклонение наибольших снижений торгового счета (в деньгах).

avg % drawdown	Среднее наибольших снижений торгового счета (%).
stdev % drawdown	Среднеквадратичное отклонение наибольших снижений торгового счета (%).
max net drawdown	Наибольшее снижение торгового счета за отдельную сделку (в деньгах).
max % drawdown	Наибольшее снижение торгового счета за отдельную сделку (%).
avg net win / avg net loss	Отношение средней прибыли выигрышных сделок к среднему убытку проигрышных сделок.
total comission	Общая сумма уплаченной комиссии.

Показатели, характеризующие выигрышные сделки.

win trades	Количество выигрышных сделок.
win trades %	Процент выигрышных сделок.
win amount	Общая прибыль всех выигрышных сделок.
avg net win	Средняя прибыль выигрышных сделок (в деньгах).
stdev net win	Среднеквадратичное отклонение прибыли выигрышных сделок (в деньгах).
max net win	Максимальная прибыль выигрышной сделки (в деньгах).
avg % win	Средняя прибыль выигрышных сделок (%).
stdev % win	Среднеквадратичное отклонение прибыли выигрышных сделок (%).
max % win	Максимальная прибыль выигрышной сделки (%).
avg bars win	Средняя продолжительность выигрышных сделок (в барах).
stdev bars win	Среднеквадратичное отклонение продолжительности выигрышных сделок (в барах).

max bars win	Максимальная продолжительность выигрышной сделки (в барах).
max consecutive wins	Наибольшее количество выигрышных сделок, следовавших одна за другой.

Показатели, характеризующие проигрышные сделки.

loss trades	Количество проигрышных сделок.
loss trades %	Процент проигрышных сделок.
loss amount	Общий убыток всех проигрышных сделок.
avg net loss	Средний убыток проигрышных сделок (в деньгах).
stdev net loss	Среднеквадратичное отклонение убытка проигрышных сделок (в деньгах).
max net loss	Максимальный убыток проигрышной сделки (в деньгах).
avg % loss	Средний убыток проигрышных сделок (%).
stdev % loss	Среднеквадратичное отклонение убытка проигрышных сделок (%).
max % loss	Максимальный убыток проигрышной сделки (%).
avg bars loss	Средняя продолжительность проигрышных сделок (в барах).
stdev bars loss	Среднеквадратичное отклонение продолжительности проигрышных сделок (в барах).
max bars loss	Максимальная продолжительность проигрышной сделки (в барах).
max consecutive losses	Наибольшее количество проигрышных сделок, следовавших одна за другой.

Показатели, характеризующие эффективность сделок.

avg enter efficiency	Средняя эффективность открытия позиции.
stdev enter efficiency	Среднеквадратичное отклонение эффективности открытия позиции.

avg exit efficiency	Средняя эффективность закрытия позиции.
stdev exit efficiency	Среднеквадратичное отклонение эффективности закрытия позиции.
avg trade efficiency	Средняя эффективность сделок.
stdev trade efficiency	Среднеквадратичное отклонение эффективности сделок.

Приведем некоторые формулы для вычисления показателей механической торговой системы:

- показатели доходности системы:

$$total\ net\ profit = \sum_{i=1}^{total\ trades} net\ profit(i)$$

$$total\ \% \ profit = \prod_{i=1}^{total\ trades} (1 + \% \ profit(i)) - 1$$

$$total\ \% \ profit\ in\ year = (1 + total\ \% \ profit)^{365 / total\ days} - 1$$

- среднее значение и с.к.о. дохода сделок (в деньгах)

$$avg\ net\ profit = \frac{1}{total\ trades} \sum_{i=1}^{total\ trades} net\ profit(i)$$

$$stdev\ net\ profit =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{total\ trades - 1} \sum_{i=1}^{total\ trades} (net\ profit(i) - avg\ net\ profit)^2}$$

- среднее значение и с.к.о. дохода сделок (в %)

$$avg\ \% \ profit = \left(\prod_{i=1}^{total\ trades} (1 + \% \ profit(i)) \right)^{1 / total\ trades} - 1 =$$

$$= \exp \left[\frac{1}{total\ trades} \sum_{i=1}^{total\ trades} \ln(1 + \% \ profit(i)) \right] - 1$$

$$stdev\ \% \ profit = (1 + avg\ \% \ profit) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{total\ trades - 1} \sum_{i=1}^{total\ trades} \left(\ln(1 + \% \ profit(i)) - \ln(1 + avg\ \% \ profit) \right)^2}$$

- среднее значение и с.к.о. наибольших снижений торгового счета (в деньгах)

$$avg\ net\ drawdown = \frac{1}{total\ trades} \sum_{i=1}^{total\ trades} net\ drawdown(i)$$

$$stdev\ net\ drawdown =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{total\ trades - 1} \sum_{i=1}^{total\ trades} (net\ drawdown(i) - avg\ net\ drawdown)^2}$$

- среднее значение и с.к.о. наибольших снижений торгового счета (в %)

$$avg\ \% drawdown = \left(\prod_{i=1}^{total\ trades} (1 + \% drawdown(i)) \right)^{1/total\ trades} - 1 =$$

$$= \exp \left[\frac{1}{total\ trades} \sum_{i=1}^{total\ trades} \ln(1 + \% drawdown(i)) \right] - 1$$

$$stdev\ \% drawdown = (1 + avg\ \% drawdown) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{total\ trades - 1} \sum_{i=1}^{total\ trades} \left(\ln(1 + \% drawdown(i)) - \ln(1 + avg\ \% drawdown) \right)^2}$$

Показатели МТС, характеризующие только прибыльные и только убыточные сделки, вычисляются аналогичным образом.

13.10. Математическое ожидание дохода сделки.

Важнейшим показателем, характеризующим качество МТС, является математическое ожидание дохода отдельной сделки. У прибыльной системы эта величина больше нуля. Задача состоит в том, чтобы по выборке сделок оценить математическое ожидание дохода и убедиться в том, что полученная оценка положительна и значимо отличается от нуля. Выборками случайных величин, на основе которых можно рассчитать выборочную среднюю и выборочное с.к.о. являются:

- в денежном выражении *net profit*,
- в процентах *% profit*.

Будем считать, что величина торгового счета не может упасть ниже нуля. Следовательно убыток по сделке не может быть меньше

торгового счета перед проведением сделки. С другой стороны, прибыль по сделке может быть неограниченно большой. Значит плотность вероятности дохода и в денежном и в процентном выражении имеет положительную асимметрию. Для проверки гипотезы о величине математического ожидания дохода отдельной сделки правильнее будет перейти к случайной величине $x = \ln(1 + \% \text{ profit})$.

Пусть случайная величина x имеет математическое ожидание μ и генеральную дисперсию σ^2 . Оценками математического ожидания и дисперсии по выборке $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ будут выборочная средняя и выборочная дисперсия:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{X})^2$$

где $N = \text{total trades}$.

При достаточно большом числе сделок доверительный интервал для μ , характеризующийся доверительной вероятностью P , задается в виде:

$$\bar{X} - t_{1-q/2, \nu} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-q/2, \nu} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

где $\nu = N - 1$, $q = 1 - P$.

Гипотеза о том, что оценка математического ожидания дохода отдельной сделки больше нуля формулируется в виде:

$$H_0: \bar{X} = 0$$

$$H_1: \bar{X} > 0$$

Проверка подобных гипотез подробно рассмотрена ранее в этой книге. Для более жесткой проверки гипотезы выборку $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ усекают справа, то есть из нее исключают значения, превосходящие правую границу доверительного интервала, после чего пересчитывают величины $\bar{X}$ и $\bar{\sigma}$.

При изучении математического ожидания дохода отдельной сделки полезно рассмотреть вопрос о том, что определяет эту величину. Вернемся к формуле для вычисления среднего значения дохода сделок:

$$avg\ net\ profit = \frac{1}{total\ trades} \sum_{i=1}^{total\ trades} net\ profit\ (i)$$

Эту формулу можно записать в другом виде, разделив сделки на прибыльные и убыточные:

$$avg\ net\ profit = \frac{win\ trades \times avg\ net\ win - loss\ trades \times |avg\ net\ loss|}{total\ trades}$$

Так как

$$\frac{win\ trades}{total\ trades} = win\ trades\ \%$$

$$\frac{loss\ trades}{total\ trades} = loss\ trades\ \% = 1 - win\ trades\ \%$$

то

$$avg\ net\ profit = win\ trades\ \% \times avg\ net\ win - (1 - win\ trades\ \%) \times |avg\ net\ loss|$$

Из последней формулы следует, что система может быть прибыльной либо за счет увеличения процента прибыльных сделок, либо за счет увеличения отношения средней прибыли выигрышных сделок к среднему убытку проигрышных сделок. У прибыльной системы среднее значение дохода больше нуля, то есть отношение средней прибыли выигрышных сделок к среднему убытку проигрышных сделок соотносится с процентом выигрышных сделок следующим образом:

$$win\ trades\ \% > \frac{|avg\ net\ loss|}{avg\ net\ win + |avg\ net\ loss|}$$

или

$$\frac{avg\ net\ win}{|avg\ net\ loss|} > \frac{1 - win\ trades\ \%}{win\ trades\ \%}$$

Аналогичное соотношение для процентных показателей можно получить, используя формулу для вычисления среднего значения дохода сделок в %:

$$(1 + avg\ \% profit)^{total\ trades} = (1 + avg\ \% win)^{win\ trades} \times (1 + avg\ \% loss)^{loss\ trades}$$

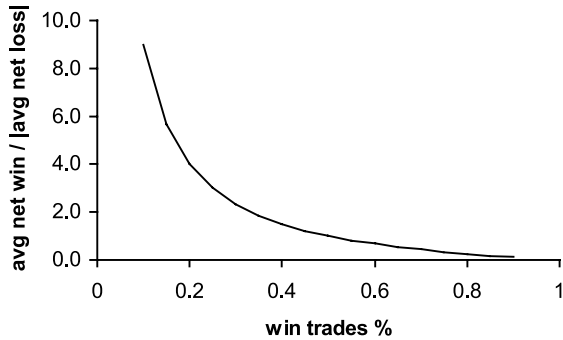
Из этого выражения следует, что

$$\ln(1 + \text{avg \% profit}) = \text{win trades \%} \times \ln(1 + \text{avg \% win}) - (1 - \text{win trades \%}) \times |\ln(1 + \text{avg \% loss})|$$

Для прибыльной системы выполняется условие

$$\frac{\ln(1 + \text{avg \% win})}{|\ln(1 + \text{avg \% loss})|} > \frac{1 - \text{win trades \%}}{\text{win trades \%}}$$

Связь между процентом выигрышных сделок и отношением средней прибыли выигрышных сделок к среднему убытку проигрышных сделок можно представить графически.



Линия на графике соответствует системам с нулевой доходностью. Прибыльные системы находятся выше этой линии, причем чем выше, тем больше у них запас прочности, то есть больше вероятность того, что МТС будет продолжать оставаться прибыльной в реальной торговле.

Соотношение между процентом выигрышных сделок и отношением средней прибыли выигрышных сделок к среднему убытку проигрышных сделок можно ужесточить, используя показатели рассеяния:

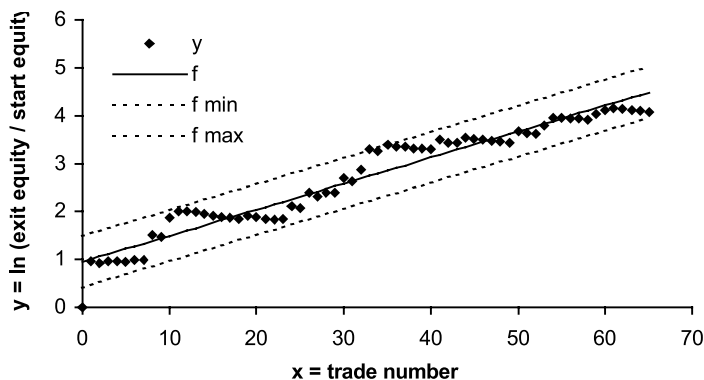
$$\frac{\text{avg net win}}{|\text{avg net loss}|} - \delta \times \left(\frac{\text{stdev net win}}{|\text{avg net loss}|} + \frac{\text{avg net win} \times \text{stdev net loss}}{|\text{avg net loss}|^2} \right) > \frac{1 - \text{win trades \%}}{\text{win trades \%}}$$

где δ - неотрицательное число, характеризующее запас прочности МТС - чем больше δ , тем выше запас прочности. У хороших систем последнее неравенство справедливо при $\delta \geq 0.5$.

13.11. Кумулятивная кривая дохода сделок.

Кумулятивная кривая дохода сделок показывает изменение торгового счета от сделки к сделке. При оценке качества торговой системы полезно изучить эту кривую в полулогарифмическом масштабе. Для исключения влияния величины начальных инвестиций кривую можно нормировать. После этого полученная зависимость исследуется с применением регрессионного анализа. Зависимость величины торгового счета от номера сделки можно получить непосредственно из отчета о сделках.

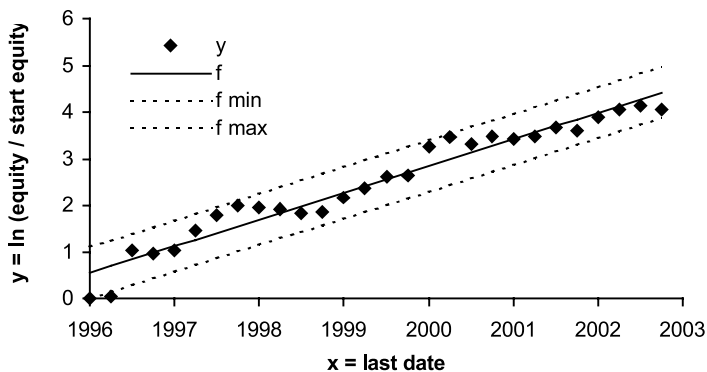
Рассмотрим результаты работы МТС, тестирование которой проводилось на временном ряде цен закрытия по индексу РТС в период с января 1996 г. по сентябрь 2002 г. За это время система совершила 65 сделок, то есть объем выборки равен 66: результаты после 65 сделок + результат до первой сделки (начальные инвестиции). На рисунке изображен логарифм эмпирической нормированной кумулятивной кривой дохода сделок (y), линейная аппроксимация (f) и 95%-ный доверительный интервал линии регрессии.



Показателем, характеризующим доходность МТС, является угол наклона линии регрессии к оси абсцисс. Чем выше угол наклона, тем более доходна МТС. Риск МТС характеризует необъ

ясненная дисперсия рассеяния эмпирических данных вокруг линии регрессии. Чем выше необъясненная дисперсия, тем больше разброс эмпирических точек, то есть выше риск системы. Отношение тангенса угла наклона линии регрессии к величине необъясненного с.к.о. является сводным показателем, характеризующим и доходность и риск системы.

Кумулятивная кривая дохода сделок показывает изменение торгового счета от сделки к сделке. Для анализа поведения счета *во времени* используют сгруппированный отчет о величине торгового счета. Изучение поведения счета по укрупненным периодам времени полностью аналогично изучению кумулятивной кривой дохода сделок. Для той же механической системы на рисунке изображен логарифм эмпирической нормированной величины торгового счета на конец каждого квартала на периоде тестирования (y), линейная аппроксимация (f) и 95%-ный доверительный интервал линии регрессии. Как правило, для анализа линии торгового счета выбираются месячные или квартальные данные.



13.12. Вероятность получения убытка в серии последовательных сделок.

В этом параграфе будет показано, как на основании показателей МТС оценить вероятность получения убытка в серии последовательных сделок.

Для упрощенного расчета вероятности убытка используем три показателя МТС, которые приведены в сводном отчете:

$win\ trades\ \%$ - процент прибыльных сделок системы,

$avg\ \%win$ - средняя величина выигрыша (%),

$avg\ \%loss$ - средняя величина проигрыша (%).

Введем обозначения:

N - заданная длина серии сделок,

n - количество выигрышных сделок в серии,

$(N - n)$ - количество проигрышных сделок в серии,

p - вероятность выигрыша ($p \equiv win\ trades\ \%$),

$total\ \%profit$ - доход по итогам серии сделок.

Будем приближенно считать, что все выигрышные сделки будут приносить одинаковый доход $avg\ \%win$, а все проигрышные сделки будут приносить одинаковый убыток $avg\ \%loss$. Тогда, если задано количество сделок и вероятность выигрыша, то доход является функцией от числа выигрышных сделок и равен

$$total\ \%profit(n) = (1 + avg\ \%win)^n \times (1 - |avg\ \%loss|)^{N-n} - 1$$

Вероятность появления в серии определенного числа выигрышных сделок описывается биномиальным распределением:

$$Prob(n) = \frac{N!}{n! (N - n)!} p^n (1 - p)^{N-n} \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Количество всех возможных комбинаций числа выигрышных и числа проигрышных сделок в серии длиной N будет равно $N + 1$. Для всех этих комбинаций необходимо рассчитать величину дохода $total\ \%profit(n)$ и соответствующую ей вероятность $Prob(n)$. Тогда вероятность убытка можно найти как:

$$Prob\ loss = \sum_{n=0}^N Prob(n)$$

где соответствующее слагаемое входит в сумму при условии, что $total\ \%profit(n) \leq 0$.

Приведем пример такого расчета для торговой системы при длине серии последовательных сделок равной $N = 20$. Пусть величина показателей системы составляет

$$p \equiv \text{win trades \%} = 45\%$$

$$\text{avg \%win} = 8\% \quad \text{avg \%loss} = -5\%$$

Эта система имеет положительное математическое ожидание дохода в расчете на одну сделку

$$\text{avg \%profit} = (1 + \text{avg \%win})^p \times (1 - |\text{avg \%loss}|)^{1-p} - 1$$

$$\text{avg \%profit} = 0.64\%$$

В приведенной ниже таблице содержатся все возможные комбинации числа выигрышных и числа проигрышных сделок, а также соответствующие этим комбинациям величины дохода по итогам серии сделок и вероятности.

<i>n</i>	<i>(N - n)</i>	<i>total \% profit</i>	<i>Prob</i>	<i>Prob loss</i>
0	20	-64.15%	0.0006%	0.0006%
1	19	-59.25%	0.0105%	0.0105%
2	18	-53.67%	0.0816%	0.0816%
3	17	-47.33%	0.4006%	0.4006%
4	16	-40.12%	1.3930%	1.3930%
5	15	-31.93%	3.6471%	3.6471%
6	14	-22.61%	7.4600%	7.4600%
7	13	-12.02%	12.2072%	12.2072%
8	12	0.02%	16.2300%	
9	11	13.70%	17.7055%	
10	10	29.26%	15.9349%	
11	9	46.95%	11.8524%	
12	8	67.06%	7.2731%	
13	7	89.92%	3.6620%	
14	6	115.91%	1.4981%	
15	5	145.46%	0.4903%	
16	4	179.05%	0.1254%	
17	3	217.23%	0.0241%	
18	2	260.64%	0.0033%	
19	1	309.99%	0.0003%	
20	0	366.10%	0.00001%	
		<i>ИТОГО</i>	<i>100%</i>	<i>25%</i>

В результате получаем, что вероятность убытка в серии сделок $\text{Prob loss} = 25\%$.

В данном случае система с положительным математическим ожиданием дохода после достаточно длинной серии сделок с вероятностью 25% принесет убыток. Можно привести другие примеры, где МТС с отрицательным математическим ожиданием после серии сделок с достаточно высокой вероятностью приносит прибыль. То есть при биржевой торговле в силу естественных законов статистики правильные решения не всегда сопровождаются прибылью, а неправильные - убытком.

Следует помнить, что приведенная выше оценка вероятности убытка после серии сделок строилась на том, что все выигрышные сделки приносят одинаковый доход $avg \%win$, а все проигрышные сделки приносят одинаковый убыток $avg \%loss$. Это является достаточно грубым приближением, которое не учитывает разброс результатов конкретной сделки. Более точная оценка вероятности убытка основана на многократном численном моделировании результатов серии сделок по методу Монте-Карло. Принципиальная схема такого алгоритма имеет вид:

- 1) Задание входных данных
 - 1.1) Из отчета о сделках массив значений доходов сделок

$$\{\%profit(k)\}$$

$$k = 1, \dots, total\ trades$$
 - 1.2) Количество розыгрышей M (чем больше розыгрышей, тем достовернее результат).
 - 1.3) Длина серии сделок N .
- 2) Вычисление вспомогательного массива $\{x(k)\}$

$$x(k) = \ln(1 + \%profit(k))$$

$$k = 1, \dots, total\ trades$$
- 3) Вычисление в табличном виде гистограммы плотности вероятности значений величины x (методика подробно изложена в главе 6).
- 4) Вычисление в табличном виде интегральной функции распределения значений величины x на основании полученной в предыдущем пункте гистограммы.
- 5) Задаем стартовое значение номера текущего розыгрыша $m = 0$.

- 6) Задаем стартовые значения количества розыгрышей, приводящих к убытку $N_{loss} = 0$
- 7) Номер текущего розыгрыша $m = m + 1$
- 8) Проводим отдельный розыгрыш результатов сделок:
 - 8.1) Генерируем набор случайных чисел в количестве N , равномерно распределенных в интервале от 0 до 1.
 - 8.2) Из равномерно распределенного набора случайных чисел с помощью полученной на шаге 4 интегральной функции получаем набор случайных чисел, распределенных как величина x . Обозначим этот набор как $\{y(i)\}$, $i = 1, \dots, N$.
 - 8.3) Находим сумму массива случайных чисел y

$$S = \sum_{i=1}^N y(i)$$
 - 8.4) Находим текущее значение количества розыгрышей, приводящих к убытку:
если $S \leq 0$, то $N_{loss} = N_{loss} + 1$
- 9) Если номер текущего розыгрыша m меньше, чем общее число розыгрышей M , то переходим на шаг 7.
- 10) После того, как сделаны все розыгрыши (то есть $m = M$), вычисляем вероятность убытка

$$Prob_{loss} = \frac{N_{loss}}{M}$$

13.13. Вероятность разорения в серии последовательных сделок.

Вероятность разорения - это вероятность того, что в серии последовательных сделок по сигналам МТС величина убытков в силу естественных законов статистики превысит заранее заданное критическое значение. Это может привести к остановке торговли и ошибочному отказу от на самом деле прибыльной МТС.

Аналитический расчет вероятности разорения связан со значительными трудностями ввиду того, что получение критического убытка зависит не только от показателей системы (процента прибыльных сделок, средней величины выигрыша, средней величины проигрыша), но и от очередности прибыльных и убыточных сделок. В результате неблагоприятной последова-

тельности сделок при работе с прибыльной системой разорение может наступить раньше, чем система докажет свое статистическое преимущество.

Так как критический убыток может быть получен до окончания серии сделок, то аналитический расчет вероятности разорения приводит к необходимости учета не только всех возможных сочетаний числа прибыльных и числа убыточных сделок в серии, но и анализу для каждого такого сочетания всех возможных последовательностей сделок. Это весьма трудоемкая задача, особенно для длинных серий.

В данном случае вычисление вероятности разорения гораздо проще можно провести численно путем многократного моделирования результатов серии сделок по методу Монте-Карло. Изложим принципиальную схему алгоритма:

- 1) Задание входных данных
 - 1.1) Из отчета о сделках массив значений доходов сделок $\{\%profit(k)\}$
 $k = 1, \dots, total\ trades$
 - 1.2) Количество розыгрышей M (чем больше розыгрышей, тем достовернее результат).
 - 1.3) Длина серии сделок N .
 - 1.4) Критическое значение убытка $\% max\ loss$.
- 2) Вычисление вспомогательного массива $\{x(k)\}$
 $x(k) = \ln(1 + \%profit(k))$
 $k = 1, \dots, total\ trades$
- 3) Вычисление в табличном виде гистограммы плотности вероятности значений величины x (методика подробно изложена в главе 6).
- 4) Вычисление в табличном виде интегральной функции распределения значений величины x на основании полученной в предыдущем пункте гистограммы.
- 5) Задаем стартовое значение номера текущего розыгрыша $m = 0$.
- 6) Задаем стартовые значения количества розыгрышей, приводящих к разорению $N\ max\ loss = 0$
- 7) Номер текущего розыгрыша $m = m + 1$

- 8) Проводим отдельный розыгрыш результатов сделок:
- 8.1) Генерируем набор случайных чисел в количестве N , равномерно распределенных в интервале от 0 до 1.
 - 8.2) Из равномерно распределенного набора случайных чисел с помощью полученной на шаге 4 интегральной функции получаем набор случайных чисел, распределенных как величина x . Обозначим этот набор как $\{y(i)\}$, $i = 1, \dots, N$.
 - 8.3) Задаем стартовое значение суммы (нарастающим итогом) массива случайных чисел y : $S = 0$
 - 8.4) Задаем стартовое значение номера случайного числа из массива y : $i = 0$
 - 8.5) Номер текущего случайного числа из массива y : $i = i + 1$
 - 8.6) Находим текущее значение суммы массива случайных чисел y : $S = S + y(i)$
 - 8.7) Проверяем, наступило ли разорение:
если $S \leq \ln(1 - \% \text{ max loss } |)$
то разорение достигнуто, поэтому находим текущее значение количества розыгрышей, приводящих к разорению
 $N \text{ max loss} = N \text{ max loss} + 1$
и переходим на шаг 7.
 - 8.8) Если номер текущего случайного числа i меньше, чем длина серии N , то переходим на шаг 8.5. В противном случае переходим на шаг 9.
- 9) Если номер текущего розыгрыша m меньше, чем общее число розыгрышей M , то переходим на шаг 7.
- 10) После того, как сделаны все розыгрыши (то есть $m = M$), вычисляем вероятность разорения
- $$Prob \text{ max loss} = \frac{N \text{ max loss}}{M}$$

14. УПРАВЛЕНИЕ КАПИТАЛОМ

14.1. Введение.

Управление капиталом - это набор правил, определяющих объем открываемых позиций в момент поступления соответствующих сигналов от механической торговой системы. Так как метод управления капиталом непосредственно влияет на динамику торгового счета, то при его выборе нужно четко определить свои инвестиционные цели.

Технически задача сводится к тому, чтобы задать такой алгоритм вычисления доли участвующего в конкретной сделке капитала, чтобы максимизировать один из показателей динамики торгового счета. Этими показателями могут быть средний доход на одну сделку, соотношение дохода и риска сделок, средний прирост торгового счета по фиксированным промежуткам времени (например по месяцам) и т.д.

Как и торговая система, метод управления капиталом должен быть тщательным образом протестирован. При этом требования к нему схожи с требованиями к торговой системе:

- небольшое количество оптимизируемых параметров,
- устойчивость в области оптимальности параметров,
- должно существовать по крайней мере несколько активов, на которых совокупность из торговой системы и метода управления капиталом имеет удовлетворительные результаты без повторной оптимизации.

14.2. Ограничение суммы убытка в сделке.

Пусть торговая система дала сигнал о покупке актива по цене *enter price*, причем величина риска по сделке составляет *%risk*, то есть в случае движения против открытой позиции сделка должна быть закрыта по цене $exit\ price = enter\ price \times (1 - \%risk)$.

Рассмотрим вопрос о том, как выбрать долю участвующего в сделке капитала таким образом, чтобы в случае неблагоприятного развития ситуации убыток не превысил заранее заданного значения. Размер капитала до и после проигрышной сделки и величина максимального убытка (в деньгах) связаны соотношением

$$\text{max net loss} = \text{exit equity} - \text{enter equity}$$

Обозначим как α долю участвующего в сделке капитала, причем $0 < \alpha < 1$. Тогда количество покупаемых ценных бумаг (лотов) равно

$$\text{volume} = \frac{\alpha \times \text{enter equity}}{\text{enter price} \times (1 + \% \text{comission})}$$

После закрытия сделки величина капитала будет равна

$$\begin{aligned} \text{exit equity} &= (1 - \alpha) \times \text{enter equity} + \\ &+ \text{exit price} \times (1 - \% \text{comission}) \times \text{volume} \end{aligned}$$

Подставляя в последнюю формулу написанные ранее соотношения после несложных преобразований получаем выражение для доли участвующего в сделке капитала

$$\alpha = \frac{|\text{max net loss}|}{\text{enter equity}} \times \frac{1 + \% \text{comission}}{2 \times \% \text{comission} + \% \text{risk} \times (1 - \% \text{comission})}$$

При определенном соотношении между *enter equity*, *max net loss* и *%risk* вычисленная по этой формуле величина α может оказаться больше 1. В этом случае в данной сделке участвует весь капитал. Выражение для количества покупаемых бумаг (лотов) имеет вид

$$\text{volume} = \text{ЦЕЛОЕ} \left(\frac{\alpha \times \text{enter equity}}{\text{enter price} \times (1 + \% \text{comission})} \right)$$

Данный метод управления капиталом имеет очень простой смысл - ограничить предельно допустимый убыток по конкретной сделке не ограничивая при этом возможную прибыль. Оптимизация метода проводится по величине предельно допустимого убытка *max net loss*.

Основным недостатком этого метода является отсутствие адаптации к текущей величине торгового счета. При существенном изменении капитала относительно начальных инвестиций величину предельно допустимого убытка нужно пересматривать и заново оптимизировать.

14.3. Ограничение процента убытка в сделке.

В отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе, метод риска фиксированным процентом капитала в каждой сделке

автоматически адаптируется к текущей величине торгового счета.

Размер капитала до и после проигрышной сделки и величина максимального убытка (в %) связаны соотношением

$$\max \%loss = \frac{\text{exit equity}}{\text{enter equity}} - 1$$

Проведя выкладки, аналогичные сделанным в предыдущем параграфе, можно получить выражение для доли участвующего в сделке капитала

$$\alpha = |\max \%loss| \times \frac{1 + \%comission}{2 \times \%comission + \%risk \times (1 - \%comission)}$$

При определенном соотношении между $\max \%loss$ и $\%risk$ вычисленная по этой формуле величина α может оказаться больше 1. В этом случае в данной сделке участвует весь капитал. Выражение для количества покупаемых бумаг (лотов) имеет вид

$$\text{volume} = \text{ЦЕЛОЕ} \left(\frac{\alpha \times \text{enter equity}}{\text{enter price} \times (1 + \%comission)} \right)$$

Этот метод позволяет автоматически реинвестировать прибыль выигрышной МТС. С другой стороны, в случае попадания в полосу убыточности, величина предельно допустимых потерь в денежном выражении постоянно уменьшается после каждой проигрышной сделки.

14.4. Максимизация средней величины дохода МТС.

Рассмотрим формулу для вычисления среднего значения дохода сделок (в %) для случая, когда в каждой сделке участвует весь капитал:

$$\text{avg } \%profit = \left(\prod_{i=1}^{\text{total trades}} (1 + \%profit(i)) \right)^{1/\text{total trades}} - 1$$

Если в каждой сделке участвует только доля капитала α , причем $0 < \alpha < 1$, и эта доля одинакова для всех сделок, то

$$\text{avg } \%profit(\alpha) = \left(\prod_{i=1}^{\text{total trades}} (1 + \alpha \times \%profit(i)) \right)^{1/\text{total trades}} - 1$$

В отдельных случаях выбором соответствующего значения α можно максимизировать величину $avg \%profit(\alpha)$ так, чтобы $avg \%profit(\alpha) > avg \%profit$.

В общем случае для произвольной последовательности сделок задача решается численно путем перебора всех значений α с небольшим шагом изменения (например 0.01). Однако, так как эта операция достаточно трудоемка, то хотелось бы найти простые характеристики торговых систем, которые бы определяли возможность такой оптимизации.

Вернемся к формуле среднего значения дохода сделок. Ее можно записать, используя средние значения выигрышных и проигрышных сделок, а также процент выигрышных сделок для случая, когда в каждой сделке участвует весь капитал:

$$1 + avg \%profit = (1 + avg \%win)^{win\ trades\ \%} \times (1 - |avg \%loss|)^{1 - win\ trades\ \%}$$

Будем приближенно считать, что

$$1 + avg \%profit(\alpha) \approx (1 + \alpha \times avg \%win)^{win\ trades\ \%} \times (1 - \alpha \times |avg \%loss|)^{1 - win\ trades\ \%}$$

Последнее равенство не является строгим, однако для оно вполне пригодно для оценочных вычислений оптимальной величины α .

Введем функцию $S(\alpha) = \ln(1 + avg \%profit(\alpha))$. Так как натуральный логарифм является монотонно возрастающей функцией, то максимум функции $S(\alpha)$ соответствует максимуму функции $avg \%profit(\alpha)$.

Запишем $S(\alpha)$ в явном виде:

$$S(\alpha) = win\ trades\ \% \times \ln(1 + \alpha \times avg \%win) + (1 - win\ trades\ \%) \times \ln(1 - \alpha \times |avg \%loss|)$$

Возьмем производную $S(\alpha)$ по α :

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \frac{win\ trades\ \% \times avg \%win}{1 + \alpha \times avg \%win} - \frac{(1 - win\ trades\ \%) \times |avg \%loss|}{1 - \alpha \times |avg \%loss|}$$

Приравняв производную к нулю, получим формулу для вычисления оптимального значения α (в том случае, если экстремум существует):

$$\alpha_{opt} = \frac{win\ trades\ \% \times avg\ \%win - (1 - win\ trades\ \%) \times |avg\ \%loss|}{avg\ \%win \times |avg\ \%loss|}$$

Так как $\alpha_{opt} > 0$ то $win\ trades\ \% > win\ trades\ \% min$

где

$$win\ trades\ \% min = \frac{|avg\ \%loss|}{avg\ \%win + |avg\ \%loss|}$$

Если последнее неравенство не соблюдается, то экстремума не существует и $\alpha_{opt} = 0$, то есть по такой МТС торговать нельзя.

Так как $\alpha_{opt} < 1$, то $win\ trades\ \% < win\ trades\ \% max$

где

$$win\ trades\ \% max = \frac{|avg\ \%loss|}{avg\ \%win + |avg\ \%loss|} \cdot (1 + avg\ \%win)$$

Если последнее неравенство не соблюдается, то экстремума не существует и $\alpha_{opt} = 1$, то есть по такой МТС нужно торговать всем капиталом в каждой сделке.

Приведем несколько примеров решения задачи оптимизации доходности МТС.

Неоптимизируемая система с положительным математическим ожиданием дохода

Результаты тестирования МТС:

$$win\ trades\ \% = 50\%$$

$$avg\ \%win = 15\% \quad avg\ \%loss = -10\%$$

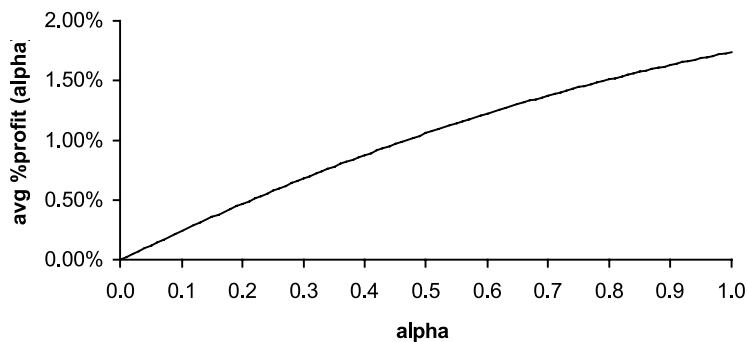
Неоптимизированная прибыль на сделку:

$$avg\ \%profit = 1.73\%$$

Границы области оптимизации:

$$win\ trades\ \% min = 40\% \quad win\ trades\ \% max = 46\%$$

Так как $win\ trades\ \% > win\ trades\ \% max$, то функция $avg\ \%profit(\alpha)$ не имеет экстремума и монотонно возрастает при увеличении α .



По такой МТС нужно торговать всем капиталом в каждой сделке.

Неоптимизируемая система с отрицательным математическим ожиданием дохода

Результаты тестирования МТС:

$win\ trades\ \% = 35\%$

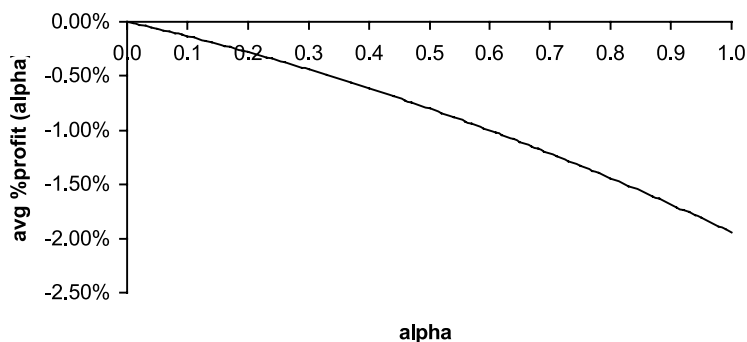
$avg\ \%win = 15\%$ $avg\ \%loss = -10\%$

Неоптимизированная прибыль на сделку:

$avg\ \%profit = -1.94\%$

Границы области оптимизации:

$win\ trades\ \%min = 40\%$ $win\ trades\ \%max = 46\%$



Так как $win\ trades\ \% < win\ trades\ \%min$, то функция $avg\ \%profit(\alpha)$ не имеет экстремума и монотонно убывает при увеличении α . По такой МТС торговать нельзя.

Оптимизируемая система с положительным математическим ожиданием дохода

Результаты тестирования МТС:

$win\ trades\ \% = 44\%$

$avg\ \%win = 15\%$ $avg\ \%loss = -10\%$

Неоптимизированная прибыль на сделку:

$avg\ \%profit = 0.25\%$

Границы области оптимизации:

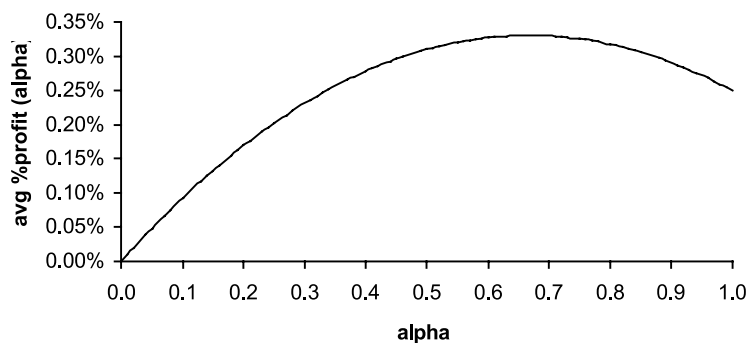
$win\ trades\ \% min = 40\%$ $win\ trades\ \% max = 46\%$

В данном случае возможна оптимизация системы, так как

$win\ trades\ \% min < win\ trades\ \% < win\ trades\ \% max$.

Функция $avg\ \%profit(\alpha)$ имеет экстремум в точке

$\alpha_{opt} = 0.67$, при этом $avg\ \%profit(\alpha_{opt}) = 0.33\%$.



Мы получили, что в результате оптимизации повышается доходность прибыльной системы.

Оптимизируемая система с отрицательным математическим ожиданием дохода

Результаты тестирования МТС:

$win\ trades\ \% = 42.5\%$

$avg\ \%win = 15\%$ $avg\ \%loss = -10\%$

Неоптимизированная прибыль на сделку:

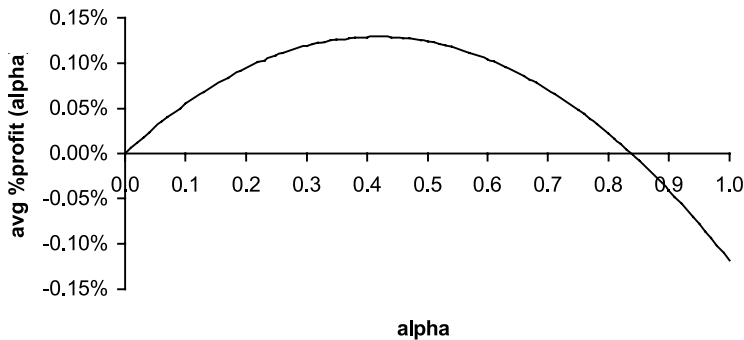
$avg\ \%profit = -0.12\%$

Границы области оптимизации:

$win\ trades\ \%min = 40\%$ $win\ trades\ \%max = 46\%$

В данном случае возможна оптимизация системы, так как $win\ trades\ \%min < win\ trades\ \% < win\ trades\ \%max$.

Функция $avg\ \%profit(\alpha)$ имеет экстремум в точке $\alpha_{opt} = 0.42$, при этом $avg\ \%profit(\alpha_{opt}) = 0.13\%$.



Мы получили, что в результате оптимизации убыточная система становится прибыльной.

14.5. Оптимизация соотношения дохода и риска МТС.

Для оптимизации соотношения дохода и риска МТС нужно найти такую долю α участвующего в сделке капитала, которая максимизировала бы следующую функцию:

$$Q(\alpha) = (1 + \alpha \times avg\ \%win)^{win\ trades\ \%} \times \\ \times (1 - \alpha \times |avg\ \%loss|)^{1 - win\ trades\ \%} \times (1 - \alpha \times \%risk) - 1$$

В данной формуле $\%risk$ - это один из показателей риска МТС, который в зависимости от предпочтений конкретного трейдера может принимать, например, следующие значения:

$$\%risk = stdev\ \%profit$$

$$\%risk = |avg\ \%drawdown|$$

$$\%risk = |max\ \%drawdown|$$

Перейдем к функции $S(\alpha) = \ln(1 + Q(\alpha))$, экстремум которой, если он существует, совпадает с экстремумом $Q(\alpha)$.

$$S(\alpha) = \text{win trades \%} \times \ln(1 + \alpha \times \text{avg \%win}) + \\ + (1 - \text{win trades \%}) \times \ln(1 - \alpha \times |\text{avg \%loss}|) + (1 - \alpha \times \%risk)$$

Взяв производную $S(\alpha)$ по α и приравняв ее к нулю получим:

$$\alpha_{opt} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

где

$$a_0 = \text{win trades \%} \times \text{avg \%win} - (1 - \text{win trades \%}) \times |\text{avg \%loss}| - \\ - \%risk$$

$$a_1 = \text{avg \%win} \times (\%risk + |\text{avg \%loss}|) + \\ + \text{win trades \%} \times \%risk \times (\text{avg \%win} + |\text{avg \%loss}|) - \\ - 2 \times \%risk \times |\text{avg \%loss}|$$

$$a_2 = 2 \times \text{avg \%win} \times |\text{avg \%loss}| \times \%risk$$

Так как $\alpha_{opt} > 0$ то $\text{win trades \%} > \text{win trades \% min}$

где

$$\text{win trades \% min} = \frac{\%risk + |\text{avg \%loss}|}{\text{avg \%win} + |\text{avg \%loss}|}$$

Так как $\alpha_{opt} < 1$, то $\text{win trades \%} < \text{win trades \% max}$

где

$$\text{win trades \% max} = \frac{\%risk + |\text{avg \%loss}| - 2 \times \%risk \times |\text{avg \%loss}|}{\text{avg \%win} + |\text{avg \%loss}|} \times \\ \times \frac{1 + \text{avg \%win}}{1 - \%risk}$$

Если не соблюдается двойное неравенство

$$\text{win trades \% min} < \text{win trades \%} < \text{win trades \% max},$$

то экстремума не существует, то есть по данной методике нельзя формальным образом выбрать наилучшее соотношение дохода и риска.

Приведем пример решения задачи оптимизации соотношения доходности и риска МТС.

Результаты тестирования МТС:

$$win\ trades\ \% = 64\%$$

$$avg\ \%win = 15\%$$

$$avg\ \%loss = -5\%$$

Неоптимизированная прибыль на сделку:

$$avg\ \%profit = 7.36\%$$

Принятая величина риска:

$$\%risk = 7\%$$

Найдем показатели, характеризующие соотношение дохода и риска до оптимизации:

$$(1 + avg\ \%profit) \times (1 - \%risk) - 1 =$$

$$= (1 + 0.0736) \times (1 - 0.07) - 1 = -0.0016$$

$$\frac{avg\ \%profit}{\%risk} = \frac{7.36}{7} = 1.0509$$

Границы области оптимизации:

$$win\ trades\ \%min = 60\%$$

$$win\ trades\ \%max = 70\%$$

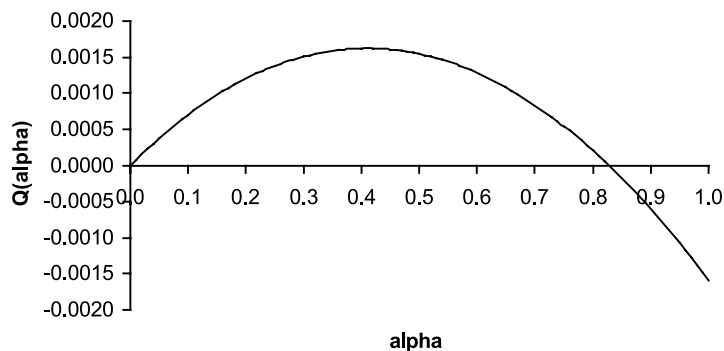
В данном случае возможна оптимизация системы, так как

$$win\ trades\ \%min < win\ trades\ \% < win\ trades\ \%max.$$

Функция $Q(\alpha)$ имеет экстремум в точке $\alpha_{opt} = 0.41$, при этом

$$avg\ \%profit(\alpha_{opt}) = 3.12\%,$$

$$\%risk(\alpha_{opt}) = \%risk \times \alpha_{opt} = 7\% \times 0.41 = 2.87\%$$



Соотношения дохода и риска после оптимизации:

$$Q(\alpha_{opt}) = (1 + avg \%profit(\alpha_{opt})) \times (1 - \%risk(\alpha_{opt})) - 1 =$$

$$= (1 + 0.0312) \times (1 - 0.0287) - 1 = 0.0016$$

$$\frac{avg \%profit(\alpha_{opt})}{\%risk(\alpha_{opt})} = \frac{3.12}{2.87} = 1.0878$$

Как видно из полученных результатов, после оптимизации довольно существенно снизился доход на одну сделку, однако улучшились соотношения дохода и риска. Кроме того, небольшая величина доли капитала, участвующего в сделках, позволяет чувствовать себя более комфортно на волатильных рынках.

14.6. Анализ соотношения скользящих средних от кумулятивной кривой дохода сделок.

В предыдущих параграфах рассматривались методы оптимизации доли участвующего в сделках капитала в зависимости от показателей МТС (процента прибыльных сделок, средней величины выигрыша, средней величины проигрыша). Однако, не была учтена возможность корреляции между результатами последовательных сделок, то есть возможность возникновения серий из прибыльных или убыточных сделок.

Формально, наличие корреляции в доходах сделок можно выявить, найдя коэффициент автокорреляции динамического ряда $\%profit(trade\ number)$, где $trade\ number$ - номер сделки, $\%profit$ - величина дохода по данной сделке (%). После этого нужно проверить гипотезу о том, значимо ли отличается вычисленная по выборке величина коэффициента автокорреляции от нуля.

Высокая положительная корреляция свидетельствует о том, что за выигрышем чаще следует очередной выигрыш и реже следует проигрыш и наоборот. При высокой отрицательной корреляции за выигрышем чаще следует проигрыш и реже - очередной выигрыш и наоборот.

Наличие корреляции между результатами сделок можно использовать в торговле двумя способами. Во-первых, модификацией решающих правил торговой системы, однако это может привести к ее излишнему переусложнению. Во-вторых, использованием методов управления капиталом, что представляется более предпочтительным. Как правило, если корреляция присутствует, то она по

ложительна, следовательно возможны достаточно длинные серии из прибыльных или убыточных сделок. Очевидно, что в полосе прибыльности нужно увеличивать долю участвующего в сделке капитала, а в полосе убыточности - уменьшать.

При наличии высокой положительной корреляции доходов сделок очень простым и достаточно эффективным способом управления величиной участвующего в сделке капитала является метод, основанный на соотношении скользящих средних различных порядков от размера торгового счета после каждой сделки *exit equity* (*trade number*).

Обозначим как *short line* и *long line* короткую и длинную простую скользящую среднюю от величины *exit equity*.

Если *short line* > *long line*, то в среднем в настоящее время торговая система показывает лучшие результаты, чем в среднем в прошлом. Следовательно, система находится в полосе прибыльности и нужно увеличивать объемы сделок. Самое простое решение - участвовать всем капиталом в каждой сделке.

Если *short line* < *long line*, то в среднем в настоящее время торговая система показывает худшие результаты, чем в среднем в прошлом. Следовательно, система находится в полосе убыточности и нужно уменьшать объемы сделок. Самое простое решение - вообще не открывать позиции.

Однако, возможны ситуации, когда единственная не проведенная прибыльная сделка по упущенной выгоде перекрывает экономию от нескольких не проведенных убыточных сделок. Для исключения таких случаев можно предложить следующую методику:

- 1) Рассчитаем набор случайных величин $\{x_k\}$
где $x = \ln(\text{short line} / \text{long line})$.
- 2) По полученной выборке найдем оценки среднего значения и с.к.о. величины x . Так как эти величины должны пересчитываться после каждой закрытой сделки, то обозначим их как $\overline{X}_k$ и σ_k .
- 3) Если приближенно считать, что случайная величина x подчиняется нормальному распределению, то в качестве доли

участвующего в очередной сделке капитала можно выбрать значение интегральной функции распределения в последней перед планируемой сделкой точке выборки. Используя функции Microsoft Excel можно найти долю капитала по формуле:

$$\alpha_{k+1} = \text{НОРМСТРАСП}\left(\frac{x_k - \overline{X}_k}{\sigma_k}\right)$$

Возможны следующие варианты

$$x_k << \overline{X}_k \Rightarrow \alpha_{k+1} \approx 0$$

$$x_k < \overline{X}_k \Rightarrow 0 < \alpha_{k+1} < 0.5$$

$$x_k = \overline{X}_k \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0.5$$

$$x_k > \overline{X}_k \Rightarrow 0.5 < \alpha_{k+1} < 1$$

$$x_k >> \overline{X}_k \Rightarrow \alpha_{k+1} \approx 1$$

Таким образом, при *short line = long line* доля участвующего в сделке капитала будет равна 50%, при *short line > long line* доля будет возрастать от 50% вплоть до 100%, а при *short line < long line* доля будет уменьшаться от 50% вплоть до 0%.

Метод управления капиталом по соотношению скользящих средних может быть оптимизирован по двум параметрам: периоду короткой скользящей средней и периоду длинной скользящей средней.

14.7. Критерий серий.

Одним из важнейших показателей механической торговой системы является доля выигрышных сделок *win trades %*. Однако, эта величина никак не характеризует наличие или отсутствие корреляции между результатами сделок. Возможны следующие варианты:

- 1) Исходы последовательных сделок независимы друг от друга, то есть выигрыши и проигрыши чередуются случайным образом. В этом случае мы имеем нулевую корреляцию между результатами сделок.

- 2) За выигрышем чаще следует выигрыш, за проигрышем – проигрыш, то есть возникают полосы прибыльности и убыточности. В этом случае мы имеем положительную корреляцию между результатами сделок.
- 3) За выигрышем чаще следует проигрыш, за проигрышем – выигрыш. В этом случае мы имеем отрицательную корреляцию между результатами сделок

Рассмотрим результаты последовательных сделок торговой системы. Назовем *серией* несколько следующих подряд прибыльных сделок или несколько следующих подряд убыточных сделок. В случае положительной корреляции количество серий на периоде тестирования будет меньше, чем количество серий при независимом чередовании прибылей и убытков. При отрицательной корреляции ситуация будет обратной. Заметим, что при расчете серий учитывается только знак дохода по сделке, а не его абсолютная величина, при этом сделки с нулевым доходом учитываются как убыточные.

Критерий серий позволяет определить, насколько значимо отличие полученного по выборке сделок эмпирического значения числа серий от ожидаемого числа серий при независимом распределении прибылей и убытков. Введем обозначения:

N - количество сделок ($N = total\ trades$).

p - вероятность прибыльной сделки ($p = win\ trades\ \%$).

R - эмпирическое значение числа серий по выборке сделок.

При достаточно большом N (больше 50) и при отсутствии корреляции между результатами сделок случайная величина R будет подчиняться нормальному распределению с параметрами:

$2p(1-p)N$ - ожидаемое значение числа серий.

$2p(1-p)\sqrt{N}$ - с.к.о. числа серий.

Для приведения случайной величины R к стандартному виду (то есть к величине с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией) нужно сделать преобразование

$$Z = \frac{R - 2p(1-p)N}{2p(1-p)\sqrt{N}}$$

Полученную таким образом нормированную случайную величину называют Z -счетом. Положительный Z -счет возникает

ет, если количество серий больше ожидаемого, то есть при отрицательной корреляции. Отрицательный Z -счет возникает, если количество серий меньше ожидаемого, то есть при положительной корреляции.

Вероятность того, что стандартная нормальная величина находится в интервале от $-|Z|$ до $|Z|$, или соответствующую величине Z -счета доверительную вероятность, можно вычислить с помощью таблиц Microsoft Excel: $P(Z) = 2 \cdot \text{НОРМСТРАСП}(|Z|) - 1$.

Как правило считают, что при $|Z| \leq 1.96$ ($P(Z) \leq 95\%$), отклонение эмпирического числа серий от ожидаемого незначимо и объясняется случайностью выборки. В этом случае нецелесообразно модифицировать торговую стратегию на основании Z -счета.

Если же мы имеем систему, у которой $|Z| > 1.96$ ($P(Z) > 95\%$), то можно использовать полученную закономерность следующим образом:

- 1) При большом по модулю и положительном по знаку Z -счете за прибыльной сделкой скорее всего последует убыточная, а за убыточной - прибыльная. Следовательно, после выигрышей нужно уменьшать объем следующей сделки, а после проигрышей - увеличивать.
- 2) При большом по модулю и отрицательном по знаку Z -счете за прибыльной сделкой скорее всего последует очередная прибыльная сделка, а за убыточной - очередная убыточная. Следовательно, после выигрышей нужно увеличивать объем следующей сделки, а после проигрышей - уменьшать.

Отметим, что критерий серий может служить фильтром для рассмотренного в предыдущем параграфе метода скользящих средних.

14.8. Увеличение объема выигрывающей позиции.

В этом параграфе будет изложен метод увеличения объема выигрывающей длинной позиции для трендовых систем. Как правило такие торговые системы имеют сравнительно небольшой процент выигрышных сделок и высокое отношение средней прибыли к среднему убытку.

Пусть торговая система дала сигнал о покупке актива в момент времени t_1 по цене P_1 . В этом случае проводится первая покупка, причем сумма сделки равна α_1 процентов от текущей величины свободных денежных средств. Если цена продолжает рост, то в момент времени t_2 делается вторая покупка по цене P_2 на сумму α_2 процентов от текущей величины свободных денежных средств. Нарастивание объема бумаг продолжается до тех пор, пока растет рыночная цена. Заметим, что начиная со второй сделки средняя цена покупки меньше текущей цены актива. При развороте рынка и достижении ценой некоторого критического уровня все позиции закрываются.

Изложим эту методику формальным образом. Введем обозначения:

X_0 - начальная величина свободных денежных средств,

N - общее число проведенных сделок,

P_k - цена, по которой проводится k -я сделка (рыночная цена),

c - комиссия за проведение сделки (%),

X_N - величина свободных денежных средств после N сделок,

$Y_N^{(B)}$ - общие затраты на покупку после N сделок (балансовая стоимость бумаг),

V_N - количество бумаг в портфеле после N сделок,

$P_N^{(B)}$ - средняя цена покупки актива после N сделок (балансовая цена).

После проведения N сделок, где сумма k -й сделки составляет α_k процентов от текущей величины свободных денежных средств, перечисленные выше переменные будут выражаться формулами:

$$X_N = X_0 \cdot \prod_{k=1}^N (1 - \alpha_k)$$

$$Y_N^{(B)} = X_0 - X_N = X_0 \cdot \left(1 - \prod_{k=1}^N (1 - \alpha_k) \right)$$

$$V_N = \frac{X_0}{1+c} \cdot \sum_{k=1}^N \left(\frac{\alpha_k}{P_k} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i) \right)$$

$$P_N^{(B)} = \frac{Y_N^{(B)}}{V_N} = (1+c) \cdot \frac{1 - \prod_{k=1}^N (1-\alpha_k)}{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\alpha_k}{P_k} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i) \right)}$$

Для последующих рассуждений эти формулы нужно разумным образом упростить. Сделаем два допущения:

- 1) Все α_k одинаковы и равны α .
- 2) Все покупки, начиная со второй, происходят при определенном процентном приросте рыночной цены относительно цены предыдущей сделки, то есть

$$P_k = P_1 \cdot (1+\beta)^{k-1}$$

После этих упрощений формулы примут вид:

$$X_N = X_0 \cdot (1-\alpha)^N$$

$$Y_N^{(B)} = X_0 \cdot (1 - (1-\alpha)^N)$$

$$V_N = \frac{\alpha \cdot X_0}{P_1 \cdot (1+c)} \cdot \frac{1+\beta}{\alpha+\beta} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\beta} \right)^N \right)$$

$$P_N^{(B)} = P_1 \cdot (1+c) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha+\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1 - (1-\alpha)^N}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\beta} \right)^N}$$

Рассмотрим зависимость этих переменных от количества сделок N на примере. Примем следующие значения входящих в формулы параметров:

$$\alpha = 30\% \quad \beta = 5\% \quad c = 0.2\%$$

$$P_1 = 1$$

$$X_0 = 100\,000$$

Результаты расчетов с этими значениями параметров приведены в таблице:

N	1	2	3	4	5
P_N	1.000	1.050	1.103	1.158	1.216
X_N	70 000	49 000	34 300	24 010	16 807
$Y_N^{(B)}$	30 000	51 000	65 700	75 990	83 193
V_N	29 940	49 900	63 207	72 078	77 992
$P_N^{(B)}$	1.002	1.022	1.039	1.054	1.067

При работе по такой методике закрытие позиций может осуществляться следующим образом:

- 1) Если после первой сделки рынок пошел против открытой позиции, то выход осуществляется по сигналу *stop loss*, причем так как объем сделки сравнительно невелик, то убыток будет небольшим.
- 2) После второй сделки цену выхода можно поставить на границу безубыточности (с учетом комиссии), то есть $P_2^{(exit)} = P_2^{(B)} / (1 - c)$.

Для данного примера $P_2^{(exit)} = 1.0022 / (1 - 0.002) = 1.024$.

После второй сделки, если не произойдут форс-мажорные события, портфель застрахован от убытков при неограниченном потенциале прибыли.

- 3) Начиная с третьей сделки цена выхода может равняться цене входа для предыдущей сделки. Например, цена выхода после пятой сделки равна цене входа по четвертой сделке, то есть 1.158, при этом средняя цена покупки с учетом комиссии равна 1.067.

Если открытие позиций осуществляется частями, то выход происходит всем объемом одновременно. Выход частями может быть целесообразен только в случае, когда разница между текущей рыночной ценой и средней ценой покупки достаточно велика, то есть если входы были сделаны на сильном и продолжительном восходящем тренде.

15. УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ ПОРТФЕЛЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА КОВАРИАЦИЙ АКТИВОВ

15.1. Введение.

В этой главе рассматриваются вопросы, связанные с оптимизацией портфеля активов. Изучается влияние корреляции между отдельными парами активов на общий риск портфеля, при этом в качестве меры риска принимается дисперсия (или среднеквадратичное отклонение). Рассказано о том, что такое эффективная диверсификация и как общий риск портфеля, составленного из произвольного количества активов, можно разделить на несистематический (диверсифицируемый) риск и рыночный (недиверсифицируемый) риск. Дано понятие границы эффективности на примере портфеля из двух активов и приведены формулы, которые позволяют выбрать на границе эффективности портфель с минимальным ожидаемым риском и портфель с максимальным отношением ожидаемого дохода к ожидаемому риску. Поставлена задача по оптимизации портфеля из произвольного количества активов с учетом ограничений на состав и веса активов в портфеле (лимитов), и приведен алгоритм поиска решений этой задачи методом Монте-Карло.

15.2. Корреляция активов и риск портфеля.

Результаты решения об инвестировании в тот или иной финансовый инструмент (актив) всегда имеют некоторую неопределенность. В большинстве случаев реально полученный доход от вложения в некий финансовый инструмент не совпадает с ожидаемым доходом по этому инструменту на момент принятия решения об инвестировании, то есть инвестирование - это сфера деятельности, связанная с риском.

Меру рассеяния реально полученных доходов относительно ожидаемого дохода, то есть риск актива, будем характеризовать дисперсией (или среднеквадратичным отклонением) доходов по данному активу.

Рассмотрим случай, когда инвестирование проводится в несколько активов (портфель). Портфель является линейной комбинацией активов, каждый из которых имеет собственное математическое ожидание дохода и дисперсию дохода.

Вспомним формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии многомерной случайной величины y , являющейся линейной комбинацией коррелированных случайных величин:

$$y = \sum_{k=1}^N a_k x_k$$

$$\mu_y = \sum_{k=1}^N a_k \mu_k$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N a_i a_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k$$

Поэтому для математического ожидания и дисперсии дохода портфеля активов можно использовать следующие формулы:

$$\mu_y = \sum_{k=1}^N w_k \mu_k$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^N w_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N w_i w_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k$$

где w - веса активов в портфеле.

В отличие от произвольной линейной комбинации случайных величин, веса активов подчиняются правилу нормирования:

$$\sum_{k=1}^N w_k = 1$$

Следовательно:

- *математическое ожидание дохода портфеля* - это взвешенная сумма математических ожиданий доходов по отдельным активам,
- *риск дохода портфеля* - это взвешенная сумма ковариаций всех пар активов в портфеле, при этом вес каждой ковариации равен произведению весов соответствующей пары активов, а ковариация актива с самим собой является дисперсией данного актива.

15.3. Понижение риска портфеля. Диверсификация.

Из формулы для дисперсии портфеля активов очевидно, что риск портфеля можно разделить на две группы слагаемых.

Слагаемые вида $w_k^2 \sigma_k^2$, которые характеризуют риск отдельных активов, всегда положительны. Следовательно они могут только увеличивать риск портфеля.

Слагаемые вида $w_i w_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k$, которые характеризуют ковариацию различных пар активов в портфеле, могут быть положительными, равными нулю и отрицательными. Все зависит от величины коэффициента корреляции между активами. Следовательно, эти слагаемые могут уменьшить риск портфеля в целом по сравнению с риском отдельных активов.

Проиллюстрируем этот эффект диверсификации на примере портфеля, состоящего из двух активов. Рассмотрим три случая, в каждом из которых математические ожидания и дисперсии активов одинаковы, а различными являются коэффициенты корреляции между ними:

1) *Активы полностью коррелированы*

В этом случае коэффициент корреляции между активами равен 1. Следовательно для дисперсии и с.к.о. портфеля получаем

$$\sigma_y^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 = (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2$$

$$\sigma_y = w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2$$

Следовательно, с.к.о. портфеля равно средней взвешенной с.к.о. отдельных активов, то есть понижение риска портфеля от диверсификации отсутствует.

2) *Активы не коррелированы*

Коэффициент корреляции между активами равен 0.

$$\sigma_y^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2}$$

В этом случае с.к.о. портфеля меньше средней взвешенной с.к.о. отдельных активов, то есть присутствует понижение риска портфеля от диверсификации, однако с.к.о. портфеля больше нуля при любых ненулевых дисперсиях отдельных активов.

3) *Активы антикоррелированы*

Коэффициент корреляции между активами равен -1.

$$\sigma_y^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 - 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 = (w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2)^2$$

$$\sigma_y = |w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2|$$

В этом случае эффект диверсификации наиболее значителен, с.к.о. портфеля может быть сведено к нулю соответствующим выбором весов отдельных активов в портфеле, то есть может быть получен безрисковый портфель.

Заметим, что во всех трех случаях математическое ожидание дохода портфеля одинаково и равно $\mu_y = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2$.

Можно сказать, что эффективная *диверсификация* - это добавление таких активов в портфель, доходы по которым имеют наименьший коэффициент корреляции с активами, уже имеющимися в портфеле.

Рассмотрим теперь портфель, состоящий из большого количества активов N , каждый из которых входит в портфель с одинаковым весом $1/N$. В случае более 2-х активов невозможно добиться того, чтобы каждая пара активов имела бы коэффициент корреляции, равный -1. Пусть все активы имеют вообще говоря различные конечные дисперсии и каждая пара активов имеет вообще говоря разные коэффициенты корреляции. Тогда формула для дисперсии портфеля примет вид:

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N^2} \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N \frac{1}{N^2} \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k$$

Преобразуем эту формулу:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{N} + \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N \frac{\sigma_{ik}}{N(N-1)/2}$$

Первая сумма - это средняя дисперсия активов, вторая (удвоенная) сумма - это средняя ковариация всех пар различных активов, следовательно:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \overline{\sigma_k^2} + \frac{N-1}{N} \cdot \overline{\sigma_{ik}}$$

Поэтому, при достаточно большом количестве активов N первым слагаемым можно пренебречь и для дисперсии портфеля можно написать приближенное выражение $\sigma_y^2 \approx \overline{\sigma_{ik}}$, то есть дисперсия портфеля приближенно равна средней ковариации активов.

Таким образом, общий риск портфеля можно разделить на две части:

- *несистематический риск*, определяемый средней дисперсией активов, который может быть исключен путем формирования портфеля из большого количества активов (диверсификацией),
- *систематический (рыночный) риск*, определяемый средней ковариацией пар различных активов, который не может быть исключен путем формирования портфеля из большого количества активов (диверсификацией).

При этом математическое ожидание дохода портфеля равно среднему математическому ожиданию дохода входящих в портфель активов:

$$\mu_y = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{N} = \overline{\mu_k}$$

15.4. Граница эффективности.

В предыдущем параграфе было показано, что в случае, когда коэффициент корреляции между активами меньше 1, диверсификация портфеля может улучшить соотношение между ожидаемым доходом и ожидаемым риском. Это связано с тем, что ожидаемый доход портфеля является линейной комбинацией ожидаемых доходов по входящим в портфель активам, а дисперсия портфеля является квадратичной функцией от с.к.о. входящих в портфель активов.

При заданных математических ожиданиях и дисперсиях активов, а также коэффициентах корреляции между различными парами активов, путем оптимизации весов активов в портфеле можно добиться улучшения соотношения между доходом и риском портфеля.

Рассмотрим портфель, состоящий из двух активов, с коэффициентом корреляции между ними равным $\rho = 0.5$:

- *1-й актив*
ожидаемый доход $\mu_1 = 10\%$
с.к.о. ожидаемого дохода (риск) $\sigma_1 = 15\%$
- *2-й актив*

ожидаемый доход $\mu_2 = 13\%$

с.к.о. ожидаемого дохода (риск) $\sigma_2 = 16\%$

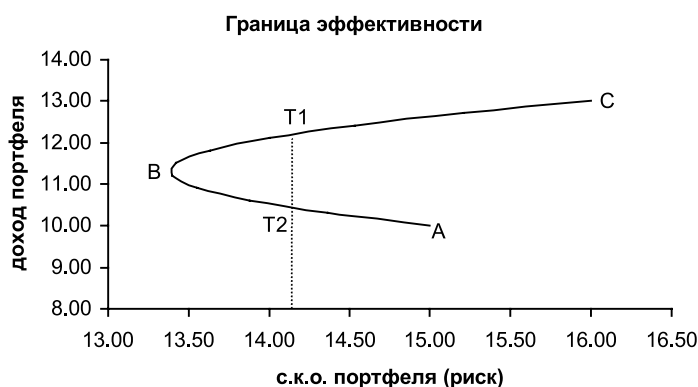
Ожидаемый доход и среднеквадратичное отклонение портфеля из двух активов вычисляются по формулам:

$$\mu_y = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 \quad \sigma_y^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\rho w_1w_2\sigma_1\sigma_2$$

Расчетные значения этих величин при различном соотношении весов активов представлены в таблице.

Вес 1-го актива w_1	Вес 2-го актива w_2	С.к.о. портфеля σ_y	Доход портфеля μ_y
0.0	1.0	16.00	13.00
0.1	0.9	15.21	12.70
0.2	0.8	14.54	12.40
0.3	0.7	14.01	12.10
0.4	0.6	13.64	11.80
0.5	0.5	13.44	11.50
0.6	0.4	13.41	11.20
0.7	0.3	13.56	10.90
0.8	0.2	13.89	10.60
0.9	0.1	14.37	10.30
1.0	0.0	15.00	10.00

Зависимость ожидаемого дохода портфеля от с.к.о. портфеля (риска) приведена на рисунке



На линии ABC лежат все возможные комбинации дохода и риска портфеля. Точка А соответствует портфелю, состоящему только из 1-го актива, точка С соответствует портфелю, состоящему только из 2-го актива, точка В соответствует портфелю с наименьшим риском.

Аналитически координаты точки В в случае портфеля из 2-х активов можно найти из следующих соображений. Так как веса активов связаны соотношением $w_2 = 1 - w_1$, то математическое ожидание и дисперсию портфеля можно представить как функцию только от w_1 :

$$\mu_y = w_1\mu_1 + (1 - w_1)\mu_2$$

$$\sigma_y^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2\rho w_1(1 - w_1)\sigma_1\sigma_2$$

Точку с минимальным значением дисперсии (с.к.о.) портфеля можно найти, взяв производную величины σ_y^2 по w_1 и приравняв ее к нулю. Решив уравнение относительно w_1 получим:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

Подставив это выражение в формулы для μ_y и σ_y , можно найти ожидаемый доход и риск портфеля (с.к.о.) в точке В. Для рассмотренного здесь примера получим:

$$w_1 = 0.56 \quad w_2 = 0.44 \quad \mu_y = 11.32\% \quad \sigma_y = 13.39\%$$

Линия ABC:

- вогнута влево при коэффициенте корреляции $\rho < 1$, при этом вогнутость тем сильнее, чем меньше коэффициент корреляции,
- является отрезком прямой, соединяющим точки А и С, при коэффициенте корреляции $\rho = 1$.

Верхняя часть линии ABC (линия ВС) является *границей эффективности*. Линия ВС является эффективной в том смысле, что на ней невозможно повысить доход без повышения риска и снизить риск без снижения дохода (в отличие от линии АВ). Выше линии ВС находятся недостижимо привлекательные комбинации дохода и риска. Ниже линии ВС находятся худшие комбинации дохода и риска, которые могут быть улучшены

переходом на линию ВС. Например, переход из точки Т2 в точку Т1 приводит к увеличению дохода портфеля при неизменном уровне риска.

На границе эффективности не существует наилучшего портфеля. Выбор точки на этой линии зависит от инвестиционных предпочтений портфельного менеджера, то есть какую плату, выражаемую в единицах риска, он готов нести за добавочную единицу дохода.

Распространенным методом выбора точки на границе эффективности является выбор такого портфеля, для которого отношение ожидаемого дохода к ожидаемому риску является максимальным. Аналитически в случае портфеля из 2-х активов эту точку можно найти, приравняв к нулю производную по w_1 от функции

$$\frac{\mu_y}{\sigma_y} = \frac{w_1\mu_1 + (1-w_1)\mu_2}{\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2 + 2\rho w_1(1-w_1)\sigma_1\sigma_2}}$$

Решив полученное уравнение относительно w_1 найдем, что:

$$w_1 = \frac{\mu_2\rho\sigma_1\sigma_2 - \mu_1\sigma_2^2}{(\mu_1\rho\sigma_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1^2) + (\mu_2\rho\sigma_1\sigma_2 - \mu_1\sigma_2^2)}$$

Для рассмотренного здесь примера точка с максимальным отношением дохода к риску:

$$w_1 = 0.37 \quad w_2 = 0.63 \quad \mu_y = 11.89\% \quad \sigma_y = 13.72\%$$

15.5. Постановка задачи по оптимизации портфеля.

Под оптимизацией портфеля, состоящего из произвольного количества активов, мы будем понимать поиск таких наборов весов активов, которые обеспечивали бы:

- ожидаемый доход портфеля больший или равный наперед заданному минимальному значению дохода,
- ожидаемый риск портфеля меньший или равный наперед заданному максимальному значению риска.

Следовательно, если предполагаются известными ожидаемые доходы по каждому из активов, ожидаемые дисперсии (с.к.о.) дохода по каждому из активов, ковариации (коэффициенты кор

реляции) между каждой парой различных активов, то задача оптимизации портфеля сводится к тому, чтобы найти такие наборы весов активов, которые бы удовлетворяли системе

$$\begin{aligned}\mu_y &= \sum_{k=1}^N w_k \mu_k \geq \mu_{\min} \\ \sigma_y^2 &= \sum_{k=1}^N w_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N w_i w_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k \leq \sigma_{\max}^2 \\ \sum_{k=1}^N w_k &= 1\end{aligned}$$

Будем предполагать, что в составе портфеля в качестве одного из активов могут находиться денежные средства, то есть безрисковый актив, имеющий нулевое ожидание дохода, нулевую дисперсию дохода и нулевой коэффициент корреляции с любым другим активом, поэтому равенство единице суммы весов всех активов является строгим.

Ожидаемый доход портфеля и ожидаемая дисперсия портфеля являются *целевыми функциями*. Целевые функции определяют задачу которая должна быть решена в процессе оптимизации. В данном случае задачей является максимизировать линейную функцию μ_y при одновременной минимизации квадратичной функции σ_y^2 с учетом заданных ограничений.

15.6. Введение ограничений на состав и веса активов в портфеле (лимитов).

В постановке задачи по оптимизации портфеля активов, сделанной в предыдущем параграфе, неявным образом предполагалось, что:

- портфельный менеджер имеет возможность инвестировать в любые активы, обращающиеся на рынке, то есть отсутствуют ограничения на состав активов в портфеле,
- отсутствуют ограничения на вес отдельного актива в портфеле.

Как правило присутствуют оба вида ограничений (лимиты). Дополним задачу оптимизации введением лимитов, то есть будем предполагать, что:

- в формулах для целевых функций присутствуют только разрешенные активы,
- вводятся ограничения на вес каждого конкретного актива в портфеле.

Ограничения на вес любого актива будем вводить как сверху, так и снизу. На практике низкое ограничение сверху вводят на потенциально очень доходные, но и очень рискованные активы. Самые низкие ограничения сверху вводят на веса активов, инвестиции в которые с высокой вероятностью могут быть потеряны полностью. В лучшем случае эти активы могут принести доход за пределами горизонта инвестирования. Ограничение сверху не может превышать 1. Ненулевые ограничения снизу вводятся как правило для создания в составе портфеля "подушки безопасности" из низкодоходных, но и низкорискованных активов. Ограничение снизу не может быть меньше 0. Кроме того, и набор ограничений сверху, и набор ограничений снизу имеют свои правила нормирования.

Итак, ограничения на веса активов в портфеле вводятся следующим образом:

$$w_{(\min)k} \leq w_k \leq w_{(\max)k}$$

$$0 \leq w_{(\min)k} < 1 \quad 0 < w_{(\max)k} \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^N w_{(\min)k} \leq 1 \quad \sum_{k=1}^N w_{(\max)k} \geq 1$$

15.7. Численное решение задачи оптимизации портфеля с учетом лимитов методом Монте-Карло.

Итак, задачу об оптимизации портфеля активов с учетом лимитов можно сформулировать в виде:

$$\mu_y = \sum_{k=1}^N w_k \mu_k \geq \mu_{\min}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^N w_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N w_i w_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k \leq \sigma_{\max}^2$$

$$S = \sum_{k=1}^N w_k = 1$$

$$w_{(\min)k} \leq w_k \leq w_{(\max)k}$$

$$0 \leq w_{(\min)k} < 1 \quad 0 < w_{(\max)k} \leq 1$$

$$S_{(\min)} = \sum_{k=1}^N w_{(\min)k} \leq 1 \quad S_{(\max)} = \sum_{k=1}^N w_{(\max)k} \geq 1$$

В этой задаче искомыми величинами являются наборы весов активов $\{w_k\}$, удовлетворяющие всем уравнениям и неравенствам. Решить такую задачу оптимизации аналитическими методами достаточно трудно, особенно в случае большого количества активов. Поэтому есть смысл попробовать найти ее решение численно методом Монте-Карло, генерируя случайным образом на компьютере удовлетворяющие ограничениям наборы весов активов и проверяя эти наборы на соответствие целевым функциям.

Разумеется, в конечной последовательности розыгрышей (генераций наборов весов) скорее всего не удастся найти все решения задачи оптимизации. Однако, каждое найденное решение будет удовлетворять всем условиям задачи, то есть портфель, построенный с помощью этого набора весов будет "достаточно оптимальным". Если решений будет несколько, из них можно выбрать то, при котором отношение ожидаемого дохода портфеля к ожидаемому риску будет максимальным.

Алгоритм решения задачи оптимизации

- 1) Задаем входные данные
 - 1.1) Набор ожидаемых доходов по активам:
 $\{\mu_k\}, k = 1, \dots, N$
 - 1.2) Набор среднеквадратичных отклонений активов:
 $\{\sigma_k\}, k = 1, \dots, N$
 - 1.3) Набор коэффициентов корреляций между различными активами
 $\{\rho_{ik}\}$
 $k = 1, \dots, N$
 $i = k + 1, \dots, N$
 - 1.4) Минимально ожидаемый доход портфеля: $\mu_{\min}$

- 1.5) Максимально ожидаемый риск портфеля: $\sigma_{\max}$
- 1.6) Набор ограничений снизу на веса активов:
 $\{w_{(\min)k}\}, k = 1, \dots, N$
- 1.7) Набор ограничений сверху на веса активов:
 $\{w_{(\max)k}\}, k = 1, \dots, N$
- 1.8) Количество розыгрышей (генераций наборов весов):
 M
- 1.9) Точность нормирования (малое положительное число): δ
- 2) Задаем стартовое значение номера текущего розыгрыша
 $m = 0$
- 3) Номер текущего розыгрыша $m = m + 1$
- 4) Разыгрываем случайным образом набор весов, соответствующий набору ограничений на веса активов
 - 4.1) Задаем начальные минимально возможные значения весов
 $w_k = w_{(\min)k}, k = 1, \dots, N$
 - 4.2) Вычисляем текущую сумму весов

$$S = \sum_{k=1}^N w_k$$
 - 4.3) $k = 0$
 - 4.4) $k = k + 1$
 - 4.5) Разыгрываем приращение веса k -го актива
 $dW = \text{СЛУЧАЙНОЕ_ЧИСЛО}(0, \text{МИНИМУМ}(1 - S, w_{(\max)k} - w_k))$
 - 4.6) Вычисляем текущий вес k -го актива
 $w_k = w_k + dW$
 - 4.7) Вычисляем текущую сумму весов
 $S = S + dW$
 - 4.8) Если $k < N$, то переходим на шаг 4.4
 - 4.9) Если не соблюдается точность нормирования, то есть $(1 - S) > \delta$, то переходим на шаг 4.3

- 5) Проверяем, соответствует ли портфель, составленный из полученных на шаге 4 весов, ограничениям на минимально ожидаемый доход и максимально ожидаемый риск портфеля

$$\mu_y = \sum_{k=1}^N w_k \mu_k \geq \mu_{\min}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^N w_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N w_i w_k \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k \leq \sigma_{\max}^2$$

Если решение соответствует этим неравенствам, то фиксируем его, то есть запоминаем текущий набор весов и соответствующие ему ожидаемый доход, ожидаемый риск, отношение дохода к риску. Текущий розыгрыш за номером m завершен.

- 6) Если номер текущего розыгрыша m меньше, чем общее число розыгрышей M , то переходим на шаг 3
- 7) После того, как сделаны все розыгрыши (то есть $m=M$), среди всех найденных решений выбираем то, при котором отношение ожидаемого дохода портфеля к ожидаемому риску портфеля будет максимальным.

Если не было найдено ни одного решения, то необходимо:

- либо увеличить количество розыгрышей,
- либо ослабить ограничения по целевым функциям, то есть уменьшить ожидаемый доход и/или увеличить ожидаемый риск портфеля,
- либо пересмотреть ограничения на веса активов в портфеле в сторону расширения интервалов разрешенных значений весов.

Пример решения задачи оптимизации

Рассмотрим портфель, состоящий из трех активов:

- *1-й актив*
ожидаемый доход 10%
с.к.о. ожидаемого дохода (риск) 15%
отношение доход/риск = 0.67
минимальный вес в портфеле 0
максимальный вес в портфеле 0.50
- *2-й актив*
ожидаемый доход 13%
с.к.о. ожидаемого дохода (риск) 20%
отношение доход/риск = 0.65

минимальный вес в портфеле 0

максимальный вес в портфеле 0.50

- 3-й актив

ожидаемый доход 18%

с.к.о. ожидаемого дохода (риск) 30%

отношение доход/риск = 0.60

минимальный вес в портфеле 0

максимальный вес в портфеле 0.50

Коэффициенты корреляции между активами:

- 1-й и 2-й активы: $\rho_{12} = 0.5$

- 1-й и 3-й активы: $\rho_{13} = -0.5$

- 2-й и 3-й активы: $\rho_{23} = 0$

Зададим минимально ожидаемый доход портфеля 15%, максимальный ожидаемый риск портфеля 18%, количество розыгрышей весов активов 10000.

Тогда решение задачи оптимизации по приведенному в этом параграфе алгоритму с выбором среди полученных решений того, которое обеспечивает максимальное отношение ожидаемого дохода к ожидаемому риску следующее:

- вес 1-го актива $w_1 = 0.1141$

- вес 2-го актива $w_2 = 0.3859$

- вес 3-го актива $w_3 = 0.5000$

- ожидаемый доход портфеля $\mu_y = 15.16\%$

- ожидаемый риск портфеля $\sigma_y = 16.58\%$

- отношение доход/риск = 0.91

Мы получили доход портфеля больше среднего арифметического доходов активов (13.67%), риск портфеля меньше среднего арифметического рисков активов (21.67%), и существенно улучшили соотношение дохода и риска по сравнению с этим соотношением для любого отдельного актива. Следует еще раз подчеркнуть, что это решение наверняка не является оптимальным. Более длинные серии розыгрышей вероятно способны его улучшить. Однако, данное решение является "достаточно оптимальным", так как удовлетворяет всем поставленным условиям.

16. УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ ПОРТФЕЛЯ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА КВАНТИЛЬНЫХ МЕР РИСКА

16.1. Введение.

В предыдущей главе были рассмотрены вопросы, связанные с управлением риском портфеля, при этом в качестве меры рассеяния ожидаемого дохода по конкретному активу и по портфелю, то есть в качестве меры риска, была использована дисперсия (или среднеквадратичное отклонение).

Широкое использование дисперсии в качестве оценки рассеяния ожидаемого дохода портфеля связано с тем, что ее можно вычислить аналитически, если известны дисперсии каждого актива и коэффициенты корреляции между активами. Действительно, дисперсия ожидаемого дохода портфеля - это взвешенная сумма ковариаций всех пар активов в портфеле, причем вес каждой ковариации равен произведению весов соответствующей пары активов, а ковариация актива с самим собой является дисперсией данного актива. При этом суммирование проводится безотносительно к разнообразию законов распределений каждого из слагаемых и возможной деформации законов распределения при суммировании.

Ситуация существенным образом усложняется, если в качестве меры рассеяния ожидаемого дохода портфеля необходимо указать квантильное отклонение с заданной доверительной вероятностью, так как это невозможно сделать, если неизвестен закон распределения доходов портфеля. Теоретически, закон распределения доходов портфеля можно найти, если известны законы распределения доходов входящих в него активов. Однако на практике аналитическое решение такой задачи сопряжено со значительными трудностями даже для малого числа активов (за исключением некоторых частных случаев). Это происходит потому, что, во-первых, доходы по входящим в портфель активам могут быть коррелированы между собой, во-вторых, при суммировании доходов активов законы их распределения могут существенным образом деформироваться, поэтому распределение дохода портфеля может сильно отличаться от распределений доходов составляющих его активов.

В этой главе будут рассмотрены практические методы вычисления квантильных мер риска дохода портфеля из произвольного количества активов и управления риском портфеля на основе их анализа.

16.2. Понятие Value-at-risk и Shortfall-at-risk.

Допустим, что предполагается сформировать портфель, состоящий из некоторого набора активов. Введем обозначения:

N - количество активов в портфеле,

T - промежуток времени, в течение которого предполагается поддерживать портфель в неизменном состоянии,

$\{w_n\}$ - набор весов, с которыми активы входят в портфель на момент его формирования,

$\{x_n\}$ - набор случайных величин, равных доходам по каждому из активов, которые будут реально получены по истечении промежутка времени T ,

y - случайная величина, равная реально полученному доходу портфеля по истечении промежутка времени T ,

$\{\mu_n\}$ - набор ожидаемых значений доходов по каждому из активов,

μ_y - ожидаемое значение дохода портфеля.

Реально полученный доход портфеля и ожидаемое значение дохода портфеля за время T можно вычислить по формулам:

$$y = \sum_{n=1}^N w_n x_n \quad \mu_y = \sum_{n=1}^N w_n \mu_n$$

В большинстве случаев оказывается, что величины y и μ_y не равны друг другу. В частности, по истечении промежутка времени T результатом инвестирования может оказаться убыток, то есть $y < 0$.

В качестве квантильной меры риска портфеля используется величина *Value-at-risk* (VAR), то есть VAR - это мера риска портфеля с заданной доверительной вероятностью.

Утверждение о том, что портфель имеет определенное значение VAR фактически означает следующее: в течение проме

жутка времени T с доверительной вероятностью P абсолютная величина убытка по портфелю не может быть больше, чем VAR (доход по портфелю не может быть меньше $-VAR$), при этом абсолютная величина убытка, превосходящая VAR , также не исключена, однако такой убыток может случиться лишь с малой вероятностью $1 - P$.

Пусть случайная величина y (доход портфеля) имеет плотность распределения $p(y)$ и функцию распределения $F(y)$. Зададим доверительную вероятность P . Обозначим как y_{1-P} такую квантиль распределения переменной y , что

- вероятность того, что случайная величина y окажется меньше или равной y_{1-P} , равна $1 - P$, т.е.

$$Prob\{y \leq y_{1-P}\} = 1 - P$$

- вероятность того, что случайная величина y окажется больше y_{1-P} , равна P , т.е.

$$Prob\{y > y_{1-P}\} = P$$

Доверительную вероятность P как правило выбирают в пределах от 0.95 до 0.99. В этом случае квантиль y_{1-P} является отрицательным числом. Тогда величина VAR равна модулю этого числа:

$$VAR = |y_{1-P}|$$

Для того, чтобы найти VAR случайной величины y , нужно решить уравнение

$$1 - P = F(-VAR)$$

или (эквивалентная форма записи)

$$1 - P = \int_{-\infty}^{-VAR} p(y) dy$$

VAR является достаточно распространенной мерой риска портфеля, которая имеет однако ряд существенных недостатков:

- 1) В отличие от дисперсии, VAR не обладает свойством аддитивности. Это означает, что даже если известны величины VAR составляющих портфель активов и коэффициенты корреляции между активами, то в общем случае на основании

этих данных невозможно рассчитать VAR портфеля. Это связано с тем, что VAR является квантильной оценкой, поэтому ее нельзя вычислить без знания закона распределения дохода портфеля. Но при суммировании доходов активов законы их распределения могут деформироваться, поэтому распределение дохода портфеля может сильно отличаться от распределений доходов составляющих его активов.

- 2) VAR не учитывает возможных больших убытков, которые могут произойти с малыми вероятностями.
- 3) При указании в качестве меры риска только величины VAR , мы не имеем информации о виде распределения доходов портфеля. При этом, если распределение доходов портфеля является островершинным (эксцесс больше 3), то риск портфеля будет недооцениваться, а если распределение доходов является плосковершинным (эксцесс меньше 3), то риск будет переоцениваться.

Исходя из перечисленных выше недостатков VAR , хотелось бы иметь характеристику риска портфеля, которая описывает реализующиеся с малыми вероятностями аномально большие убытки. Такой мерой риска является *Shortfall-at-risk* (SAR). SAR - это ожидаемое значение убытка портфеля, при условии, что абсолютная величина убытка превосходит VAR . Исходя из данного определения, значение SAR может быть вычислено по формуле:

$$SAR = \int_{-VAR}^{-\infty} y \cdot p(y) dy$$

Совместное использование в качестве мер риска VAR и SAR позволяет иметь более полную информацию о хвостах распределения доходов портфеля. При этом представляется целесообразным рассчитывать эти величины одновременно для нескольких различных значений доверительной вероятности P (например 0.950, 0.975, 0.990, 0.999).

16.3. Вычисление Value-at-risk и Shortfall-at-risk.

Прежде всего рассмотрим, каким образом можно найти значения VAR и SAR для отдельного актива. Для расчета этих величин необходима информация о плотности распределения дохо

дов, которая может быть найдена по эмпирической выборке рыночных цен данного актива. Введем обозначения:

$0, \dots, t_{\max}$ - интервал времени, на котором производится выборка цен,

$Price_t$ - цена актива в момент времени t ($0 \leq t \leq t_{\max}$).

Тогда величиной, характеризующей однодневный доход от вложения в данный актив от момента $t-1$ до момента t будет

$x_t = \ln(Price_t / Price_{t-1})$, где $1 \leq t \leq t_{\max}$.

Значения VAR и SAR могут быть определены по выборке случайных величин $\{x_t\}$ следующими способами:

1) *Непосредственно по выборке $\{x_t\}$.*

При использовании этого способа выборка $\{x_t\}$ должна быть упорядочена по возрастанию. После этого нужно найти номер M в упорядоченной по возрастанию выборке, соответствующий доверительной вероятности P :

$$M = 1 + \text{ЦЕЛОЕ}((1 - P) \cdot (t_{\max} - 1))$$

Тогда

$$VAR = |x_M| \quad SAR = \frac{1}{t_{\max}} \sum_{t=1}^M x_t$$

Данный метод является самым простым и самым грубым. Он исключительно чувствителен к конкретной случайной реализации цен на интервале $0, \dots, t_{\max}$. Кроме того, этот способ сильно зависит от объема выборки. Действительно, при малой величине $t_{\max}$ мы можем для различных значений P получать один и тот же номер M , и как следствие этого, одни и те же величины VAR и SAR .

2) *Путем идентификации закона распределения случайной величины x .*

Для этого по выборке $\{x_t\}$, используя изложенную в главе 6 методику, необходимо построить эмпирическую гистограмму распределения случайной величины x , после чего аппроксимировать эту гистограмму одним из аналитических

законов распределения, которые описаны в главе 2. Тем самым будет найдена формула для плотности распределения $p(x)$. Для заданной доверительной вероятности P величины VAR и SAR могут быть найдены из уравнений

$$1 - P = \int_{-\infty}^{-VAR} p(x) dx \quad SAR = \int_{-\infty}^{-VAR} x \cdot p(x) dx$$

Решение этих уравнений проводится как правило численно, методика приведена в главе 2.

3) *Путем многократного моделирования методом Монте-Карло*

Как и в предыдущем случае, по эмпирической выборке $\{x_i\}$ необходимо найти аналитическую формулу для плотности распределения $p(x)$. Далее, используя генератор псевдослучайных чисел, нужно провести многократное моделирование случайной величины x (методика подробно изложена в главе 2). После этого величины VAR и SAR определяются уже по смоделированной выборке.

ПРИМЕЧАНИЕ. Таким образом мы нашли однодневные VAR и SAR . Если необходимо вычислить например пятидневные значения этих величин, то вместо дневных баров цен используются недельные бары и т.д.

После того как известно, каким образом можно найти значения VAR и SAR для отдельного актива, можно описать процедуру поиска этих величин для портфеля.

Проще всего VAR и SAR для портфеля можно найти, если на интервале времени $0, \dots, t_{\max}$ рассмотреть поведение виртуального портфеля, сформированного в момент $t = 0$ из интересующих нас активов, каждый из которых входит в портфель с заданным весом. Если считать, что $Price_t$ - это стоимость виртуального портфеля в момент времени t , то вся процедура поиска VAR и SAR для него уже описана выше. Такой подход обладает следующими достоинствами:

- отсутствует необходимость учета корреляции между входящими в портфель активами (это происходит автоматически),

- отсутствует необходимость учета законов распределения входящих в портфель активов, так как нас интересует только закон распределения результирующего виртуального портфеля, а его можно определить по выборке $\{Price_t\}$.

Существенным недостатком такого подхода является то, что текущие веса активов в портфеле равны заданному набору весов $\{w_n\}$ только в начальный момент времени $t = 0$. Это происходит потому, что динамика цен входящих в виртуальный портфель активов различна для разных активов, результатом чего является постоянное изменение соотношения текущих весов активов в виртуальном портфеле в различные моменты времени (каждый актив учитывается по его текущей рыночной цене). Действительно, если считать, что в момент $t = 0$ стоимость виртуального портфеля $Price_0 = 1$, то в последующие моменты времени его стоимость выражается формулой:

$$Price_t = \sum_{n=1}^N w_n \frac{Price_{n,t}}{Price_{n,0}} \quad t = 1, \dots, t_{\max}$$

где $Price_{n,t}$ - это цена n -го актива в момент времени t .

Из этой ситуации может быть два выхода. Во-первых, можно пренебречь изменением соотношения весов. Во-вторых, после каждого торгового дня приводить текущие веса активов в соответствие с заданным набором $\{w_n\}$. В этом случае стоимость виртуального портфеля в произвольный момент времени будет равна:

$$Price_0 = 1$$

$$Price_t = \prod_{i=1}^t \left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{Price_{n,i}}{Price_{n,i-1}} \right) \quad t = 1, \dots, t_{\max}$$

Более удобно использовать рекуррентную формулу

$$Price_t = Price_{t-1} \cdot \sum_{n=1}^N w_n \frac{Price_{n,t}}{Price_{n,t-1}}$$

В некоторых частных случаях VAR портфеля можно найти аналитически, если известен набор $\{VAR_n\}$ входящих в портфель

активов и коэффициенты корреляции между активами. Это следующие случаи:

- 1) Если доходы всех активов распределены нормально, то их сумма (доход портфеля), также распределен нормально, то есть не происходит деформации закона распределения при суммировании.
- 2) Если при не обязательно нормальном распределении доходов активов выбран уровень доверительной вероятности $P = 0.95$. Дело в том, что для большого числа наиболее употребительных законов распределения 5%-ная квантиль распределения выражается через математическое ожидание и с.к.о. по единой формуле $x_{0.05} \approx \mu - 1.6\sigma$.

В обоих случаях VAR портфеля вычисляется по формуле, аналогичной формуле для дисперсии портфеля:

$$VAR_y^2 = \sum_{k=1}^N w_k^2 \cdot VAR_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=k+1}^N w_i w_k \rho_{ik} \cdot VAR_i \cdot VAR_k$$

16.4. Оптимизация портфеля с учетом Value-at-risk и Short-fall-at-risk.

Алгоритм численного решения задачи оптимизации портфеля по соотношению математического ожидания дохода и среднеквадратичного отклонения дохода приведен в главе 15 параграфе 15.7 этой книги. Введение в рассмотрение мер риска портфеля VAR и SAR лишь дополняет этот алгоритм. Выбор конкретного решения из множества решений задачи оптимизации портфеля (то есть оптимальное соотношение величин μ_y , σ_y , VAR_y и SAR_y), каждый портфельный менеджер осуществляет с учетом своих инвестиционных предпочтений.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей, "Наука", 1971.
2. Крамер Г., Математические методы статистики, "Мир", 1975.
3. Новицкий П.В., Зограф И.А., Оценка погрешностей результатов измерений, "Энергоатомиздат", 1985.
4. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров, "Наука", 1984.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды, "Наука", 1981.